

Chapitre 22

Le théorème de Pythagore

On prête aussi beaucoup à Pythagore

Pythagore serait né vers de 580 av. J.-C. à Samos, une île grecque, et mort vers 495 av. J.-C. Il est le fondateur d'une secte religieuse installée en Grande Grèce (c'est-à-dire dans le sud de l'Italie). Une de ses doctrines religieuses serait « tout est nombre ». On n'a conservé aucun texte de lui (s'il a écrit quoi que ce soit) et l'on ne sait que très peu de choses sur sa vie. Beaucoup de légendes, écrites plusieurs siècles après sa mort, lui attribuent des prodiges. Et le « théorème de Pythagore » ? Selon Diogène Laërce, Apollodore le Logicien (dont on ne sait rien) dit que Pythagore sacrifia des bœufs lorsqu'il découvrit la proposition mathématique qui porte aujourd'hui son nom. Cependant, les doctrines religieuses pythagoriciennes interdisent les sacrifices d'animaux. Selon toute vraisemblance, l'attribution à Pythagore de la propriété que nous allons étudier dans ce chapitre ne remonte pas avant le premier siècle de l'ère chrétienne, mais elle était connue bien avant cela. Elle est d'ailleurs démontrée dans les *Éléments* d'Euclide (vers 300 av. J.-C.).

Un avant-goût

Construisez un triangle ABC rectangle en C en utilisant la propriété vue au chapitre 18. Mesurez les longueurs des côtés le plus précisément possible. Vous ne remarquez rien ? C'est normal ! Calculez AB^2 , AC^2 et BC^2 . Maintenant, il y a quelque chose à remarquer...

Cours

I. Le triangle est rectangle

Dans cette section, on se donne un triangle rectangle (ce qui explique le titre) et l'on obtient une certaine relation liant les longueurs de ses côtés. La principale application (au niveau du collège) consiste à trouver la longueur d'un côté connaissant celle des deux autres.

I.1. Le théorème de Pythagore

Définition 1

L'**hypoténuse** d'un triangle rectangle est le côté opposé à l'angle droit.

Propriété 1

L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus grand côté de ce triangle.

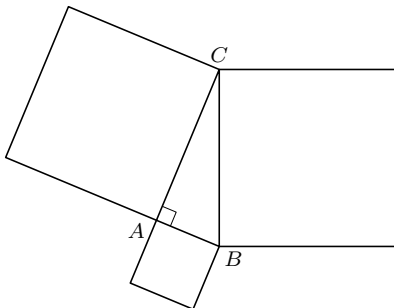
REMARQUE. Vous démontrerez cette propriété à l'exercice 1.

Propriété 2 (théorème de Pythagore)

Soit ABC un triangle. Si ABC est rectangle en A , d'hypoténuse $[BC]$, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse.

REMARQUE. On peut voir la chose en terme d'aires. Le théorème de Pythagore, affirme que, sur la figure suivante, l'aire du carré construit sur le côté $[BC]$ est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$.



I.2. Exemples numériques

Les trois exemples suivants servent de modèles pour les exercices calculatoires que l'on peut vous donner.

Exemple 1. Soit EFG un triangle rectangle en F tel que $EF = 12$ cm et $GF = 5$ cm. Calculer EG .

SOLUTION. On se place dans le triangle EFG rectangle en F , d'hypoténuse $[EG]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} EG^2 &= EF^2 + GF^2 \\ &= 12^2 + 5^2 \\ &= 144 + 25 \\ &= 169. \end{aligned}$$

Arrivé là, on cherche un nombre positif (car on cherche une longueur) qui, mis au carré, donne 169. Deux nombres ont pour carré 169 : 13 et -13 . Un seul convient pour le problème posé : 13. Donc, $EG = 13$ cm. On reprend la rédaction. Votre copie devrait ressembler à ce qui suit :

On se place dans le triangle EFG rectangle en F , d'hypoténuse $[EG]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} EG^2 &= EF^2 + GF^2 \\ &= 12^2 + 5^2 \\ &= 169, \\ EG &= 13 \text{ cm.} \end{aligned}$$

REMARQUES. $\triangleright$ Le mot important de la première phrase est « rectangle ». Il n'est pas nécessaire de préciser le sommet de l'angle droit et l'hypoténuse, un seul suffit.

- $\triangleright$ La deuxième phrase vous évite de réciter le théorème (Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs...). Il est de bon goût de ne pas confondre Pythagore et Thalès (voire d'écrire Pythalès...).
- $\triangleright$ Il faut faire attention en écrivant la première ligne de calcul. Le côté apparaissant seul dans un des membres de l'égalité est l'hypoténuse (d'où l'intérêt de la citer dans la rédaction). Lorsque vous écrivez cette première ligne, la question à vous poser est « Quelle est l'hypoténuse ? ».
- $\triangleright$ Il faut faire attention et ne pas mettre les carrés au hasard.
- $\triangleright$ Évitez de mettre des unités partout. Précisez l'unité de longueur à la fin du calcul. D'ailleurs, les carrés ne s'expriment pas dans une unité de longueur, mais dans une unité d'aire.

▷ Il peut être utile de connaître la liste des carrés des « petits » nombres entiers, pour gagner du temps. Le programme demande que les élèves connaissent les carrés des nombres entiers de 1 à 12. Vous pouvez en connaître un peu plus :

$$\begin{array}{cccc}
 1^2 = 1 & 2^2 = 4 & 3^2 = 9 & 4^2 = 16 \\
 5^2 = 25 & 6^2 = 36 & 7^2 = 49 & 8^2 = 64 \\
 9^2 = 81 & 10^2 = 100 & 11^2 = 121 & 12^2 = 144 \\
 13^2 = 169 & 14^2 = 196 & 15^2 = 225 & 16^2 = 256 \\
 20^2 = 400 & 25^2 = 625 & 30^2 = 900 & 50^2 = 2\,500
 \end{array}$$

Exemple 2. Il n'y a pas de raison que la longueur que vous obtenez en utilisant le théorème de Pythagore « tombe juste ». On étudie maintenant ce problème.

Soit LMN un triangle rectangle en N tel que $LN = 8$ cm et $MN = 11$ cm. Calculer LM et en donner une valeur approchée à 0,1 cm près.

SOLUTION. On se place dans le triangle LMN rectangle en N , d'hypoténuse $[LM]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned}
 LM^2 &= LN^2 + MN^2 \\
 &= 8^2 + 11^2 \\
 &= 64 + 121 \\
 &= 185.
 \end{aligned}$$

Arrivé là, on cherche un nombre positif (car on cherche une longueur) qui, mis au carré, donne 185. On constate que ce nombre n'apparaît pas dans la liste des carrés donnée ci-dessus. Mauvaise nouvelle... Le nombre que l'on cherche n'est pas un nombre entier. Ce n'est même pas une fraction (ceci peut se démontrer avec des connaissances mathématiques dépassant le niveau de la quatrième ; nous aborderons ce problème au chapitre 32). Nous allons devoir introduire une nouvelle écriture pour noter un tel nombre : la racine carrée. Son existence repose sur la propriété suivante.

Propriété 3

Soit $a \geq 0$. Il existe un unique nombre positif b tel que $b^2 = a$.

REMARQUE. On admet cette propriété.

Définition 2

Soit a un nombre positif. La **racine carrée** de a , notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif qui, mis au carré, donne a . Avec des symboles mathématiques, cela donne : pour tout $a \geq 0$, $\sqrt{a} \geq 0$ et

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

EXEMPLES. $\triangleright$ En prenant $a = 5$, on obtient $(\sqrt{5})^2 = 5$.

$\triangleright$ L'écriture $\sqrt{-5}$ n'a pas de sens, car -5 est négatif.

$\triangleright$ Il se peut que la racine carrée « tombe juste » : $\sqrt{49} = 7$, car $7^2 = 49$.

$\triangleright$ Pour obtenir une valeur approchée, il faut utiliser la touche correspondante de la calculatrice : $\sqrt{}$ ou $\boxed{\sqrt{x}}$ ou $\boxed{\sqrt[2]{x}}$ (suivant le modèle).

On obtient avec une calculatrice $\sqrt{5} \approx 2,23$.

$\triangleright$ Avec une calculatrice, on obtient $\sqrt{0,5} \approx 0,71$.

$\triangleright$ Avec une calculatrice, on obtient $\sqrt{50} \approx 7,07$.

REMARQUE. Vous donnez le nombre de décimales que l'on vous demande. Si rien n'est précisé, vous en mettez une ou deux. En aucun cas, vous ne recopiez les dix chiffres apparaissant à l'écran (on n'est plus dans la faute de goût, mais dans l'absurde, car les instruments de mesure à votre disposition ne vous permettent pas d'obtenir une telle précision, comparée aux données initiales).

On revient maintenant à l'exemple initial :

SOLUTION. On se place dans le triangle LMN rectangle en N , d'hypoténuse $[LM]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} LM^2 &= LN^2 + MN^2 \\ &= 8^2 + 11^2 \\ &= 64 + 121 \\ &= 185, \\ LM &= \sqrt{185} \text{ cm} \\ &\approx 13,6 \text{ cm.} \end{aligned}$$

REMARQUE. La valeur exacte de LM est $\sqrt{185}$ cm et 13,6 cm est une valeur approchée. Il est de bon goût de donner la valeur exacte avant une valeur approchée.

Exemple 3. Soit RST un triangle rectangle en R tel que $ST = 18$ m et $RS = 13$ m. Calculer RT et en donner une valeur approchée à 0,01 m près.

SOLUTION. On se place dans le triangle RST rectangle en R , d'hypoténuse $[ST]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} ST^2 &= RT^2 + RS^2, \\ \text{soit } 18^2 &= RT^2 + 13^2, \\ \text{donc } RT^2 &= 18^2 - 13^2 \\ &= 155, \\ RT &= \sqrt{155} \text{ m} \\ &\approx 12,45 \text{ m}. \end{aligned}$$

REMARQUES. $\triangleright$ Il faut faire attention en écrivant la première ligne de calcul (comme dit précédemment). Le côté du triangle apparaissant seul dans l'un des membres de l'égalité est l'hypoténuse. Lorsque vous écrivez cette première ligne, la question à vous poser est « Quelle est l'hypoténuse ? ». La question « Quelle longueur me demande-t-on ? » arrive une fois que vous avez introduit les valeurs dans votre calcul.

$\triangleright$ Si vous obtenez dans votre calcul un carré négatif, il faut vous inquiéter. Il y a de grandes chances que vous confondiez l'hypoténuse avec un côté de l'angle droit.

I.3. Démonstrations

Il existe beaucoup de démonstrations du théorème de Pythagore. Nous allons en étudier deux. La première s'inspire fortement d'une démonstration apparaissant dans le premier livre des *Éléments* d'Euclide (vers 300 av. J.-C.). La seconde suit celle donnée dans les *Éléments de géométrie* de Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

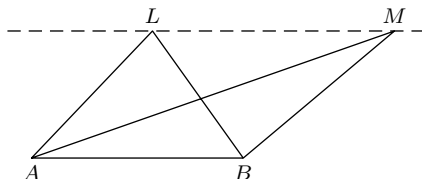
DÉMONSTRATION. Cette première démonstration utilise l'interprétation du théorème de Pythagore en terme d'aires. Soit ABC un triangle rectangle en A . On construit extérieurement un carré sur chacun des côtés de ABC . Avec les notations de la figure suivante, on doit démontrer que l'aire du carré $BCHK$ est égale à la somme des aires des carrés $ACDE$ et $ABIJ$, de façon abrégée

$$\mathcal{A}_{BCHK} = \mathcal{A}_{ACDE} + \mathcal{A}_{ABIJ}.$$

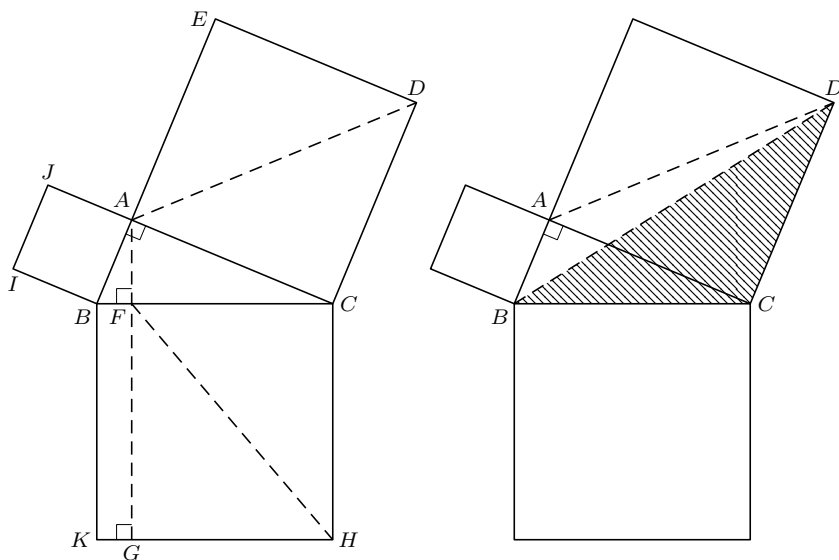
La hauteur issue de A coupe $[BC]$ en F et $[KH]$ en G . On va prouver que l'aire du carré $ACDE$ est égale à l'aire du rectangle $CFGH$ ou, ce qui revient au même, que l'aire du triangle ACD est égale à l'aire du triangle FCH . Pour cela, on utilise la propriété suivante (démontrée à l'exercice 15 du chapitre 13).

Propriété 4

Soient A et B deux points distincts et Δ une droite strictement parallèle à (AB) . Soient L et M deux points distincts appartenant à Δ . Les triangles ABL et ABM ont la même aire.



On s'intéresse d'abord aux triangles ACD et BCD (voir la deuxième figure ci-dessous). Les droites (CD) et (AB) sont parallèles, donc, d'après la propriété précédente, $\mathcal{A}_{ACD} = \mathcal{A}_{BCD}$.



On considère maintenant les triangles BCD et HCA (voir la troisième figure), que l'on associe par

$$D \leftrightarrow A, \quad B \leftrightarrow H, \quad C \leftrightarrow C.$$

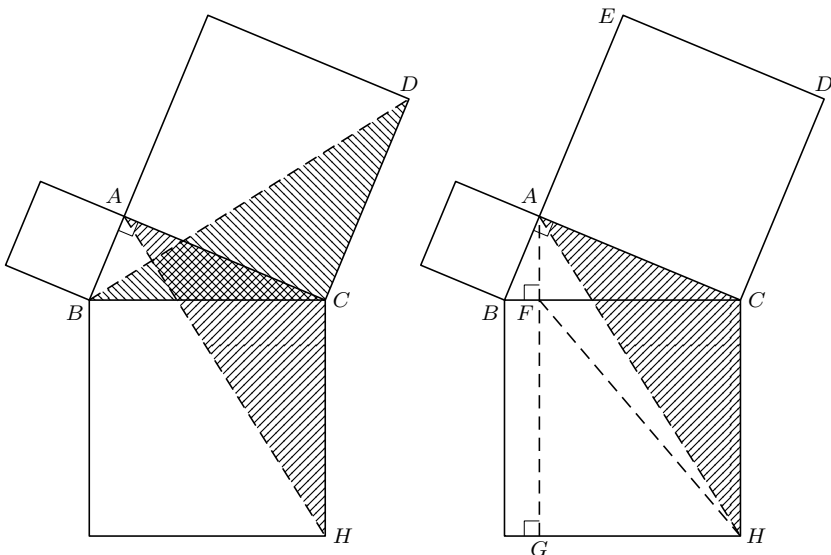
Le quadrilatère $ACDE$ est un carré, donc $CD = CA$. De même, $BC = HC$. De plus, la relation de Chasles donne

$$\begin{aligned} \text{mes}(\widehat{BCD}) &= \text{mes}(\widehat{BCA}) + \text{mes}(\widehat{ACD}) \\ &= \text{mes}(\widehat{BCA}) + \text{mes}(\widehat{BCH}) \\ &= \text{mes}(\widehat{ACH}). \end{aligned}$$

Ainsi, les triangles BCD et HCA vérifient la même condition C-A-C, donc ils sont égaux. On en déduit que

$$\mathcal{A}_{BCD} = \mathcal{A}_{ACH}.$$

On s'intéresse pour finir aux triangles ACH et FCH (voir la dernière figure). Les droites (CH) et (AF) sont parallèles, donc, d'après la propriété précédente, $\mathcal{A}_{ACH} = \mathcal{A}_{FCH}$. Ainsi, $\mathcal{A}_{ACD} = \mathcal{A}_{FCH}$, d'où $\mathcal{A}_{ACDE} = \mathcal{A}_{FCHG}$.



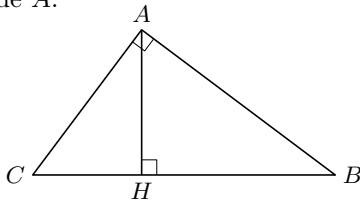
On démontre de même que $\mathcal{A}_{ABIJ} = \mathcal{A}_{BFGK}$ et l'on conclut que

$$\mathcal{A}_{BCHK} = \mathcal{A}_{ACDE} + \mathcal{A}_{ABIJ}.$$

REMARQUES. $\triangleright$ Il faudrait avoir correctement défini la notion d'aire d'un polygone pour que la démonstration précédente soit complète.

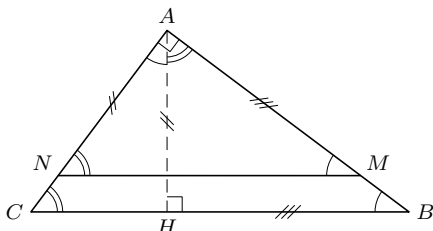
$\triangleright$ Cette démonstration n'est pas à connaître.

DÉMONSTRATION. Soit ABC un triangle rectangle en A . Soit H le pied de la hauteur issue de A .



On a $\text{mes}(\widehat{CAB}) \geq \text{mes}(\widehat{ABC})$ et $\text{mes}(\widehat{CAB}) \geq \text{mes}(\widehat{ACB})$, donc le point H se trouve entre B et C (on a prouvé ce résultat à l'ex. 18 du ch. 16).

Soit M le point de $[AB]$ tel que $AM = BH$ (ce point existe, car $BH < AB$) et soit N le point de $[AC]$ tel que $AN = AH$ (voir la figure ci-dessous).



Les triangles AMN et HBA , associés par

$$A \leftrightarrow H, \quad M \leftrightarrow B, \quad N \leftrightarrow A,$$

vérifient la même condition C-A-C, donc ils sont égaux et $MN = AB$. Ainsi, les angles correspondants $\widehat{CBA}$ et $\widehat{NMA}$ ont la même mesure, donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC},$$

autrement dit

$$\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}.$$

On en déduit que

$$BC \times BH = AB^2.$$

On démontre de même, en utilisant le triangle ACH , que

$$BC \times CH = AC^2.$$

En additionnant membre à membre ces deux dernières égalités et en factorisant, on obtient

$$BC \times (BH + CH) = AB^2 + AC^2,$$

autrement dit

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

REMARQUES. $\triangleright$ Cette démonstration, pas plus que la précédente, n'est à connaître.

$\triangleright$ Il faudrait avoir complètement démontré le théorème de Thalès pour que la démonstration précédente soit complète.

$\triangleright$ Vous ne vous attendiez peut-être pas à voir réapparaître les triangles égaux et le théorème de Thalès en même temps dans ce chapitre... On développera cette idée au chapitre 36, où l'on reviendra sur cette démonstration.

Corollaire

Soient ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A . On a

$$AB^2 = BH \times BC,$$

$$AC^2 = CH \times BC,$$

$$HA^2 = HB \times HC.$$

DÉMONSTRATION. On a déjà prouvé les deux premières égalités. On prouve la troisième. On peut supposer que $\widehat{ACB} \geq \widehat{ABC}$ (si ce n'est pas le cas, on renomme B en C et C en B). On a montré que

$$\widehat{HBA} = \widehat{CAH}$$

et

$$\widehat{HCA} = \widehat{BAH}.$$

On en déduit que $CH < AH < BH$ (il s'agit de la prop. 9 du ch. 16). Il existe un unique point P sur $[HB]$ tel que $HP = HA$ et un unique point Q sur $[HA]$ tel que $HQ = HC$. Comme dans la démonstration précédente, (PQ) et (AB) sont parallèles et, d'après la propriété de Thalès,

$$\frac{HP}{HB} = \frac{HQ}{HA},$$

soit

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HA},$$

d'où $HA^2 = HB \times HC$.

I.4. Une application

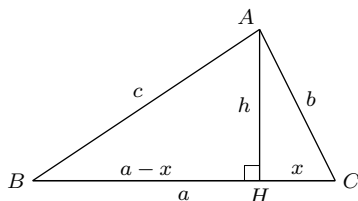
On va démontrer la propriété 1 du chapitre 9 que l'on rappelle ci-dessous.

Propriété 5

On se donne trois longueurs. Si la plus grande est strictement inférieure à la somme des deux autres, alors on peut construire un triangle dont les côtés ont pour longueur les trois longueurs données.

DÉMONSTRATION. Soient $0 < c \leq b \leq a$ les trois longueurs données. Par hypothèse, $a < b + c$. On procède en deux étapes, par analyse et synthèse.

▷ On suppose qu'il existe un triangle ABC tel que $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$. Soit H le pied de la hauteur issue de A . Le point H se trouve entre B et C . On pose $AH = h$ et $CH = x$.



Le théorème de Pythagore, appliqué aux triangles rectangles ABH et ACH , donne

$$\begin{aligned}x^2 + h^2 &= b^2, \\(a - x)^2 + h^2 &= c^2.\end{aligned}$$

On déduit de la première égalité que

$$h^2 = b^2 - x^2 \quad \text{et} \quad h = \sqrt{b^2 - x^2}.$$

La seconde égalité donne alors

$$(a - x)^2 + b^2 - x^2 = c^2.$$

En développant l'expression $(a - x)^2$ (cette technique sera expliquée au prochain chapitre) et en simplifiant, on obtient

$$a^2 - 2ax + b^2 = c^2,$$

d'où

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

On conclut que, si le triangle ABC existe, alors les longueurs AH , BH et CH sont entièrement déterminées (en fonction de a , b et c) par les égalités ci-dessus.

- On fait maintenant la synthèse en montrant qu'il existe un triangle vérifiant les conditions données. On commence en choisissant deux points B et C tels que $BC = a$. On pose

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

et l'on a

$$\begin{aligned}a - x &= a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \\&= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.\end{aligned}$$

La condition $0 < c \leq b \leq a$ implique $a^2 - b^2 + c^2 > 0$. On en déduit que $0 < x < a$. Il s'ensuit qu'il existe un point H entre B et C tel que $CH = x$ (voir la figure précédente).

On s'intéresse à présent à la quantité $b - x$. On obtient

$$\begin{aligned}b - x &= b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \\&= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\end{aligned}$$

et les techniques de calcul littéral (qui seront étudiées aux chapitres 23 et 31) donnent

$$b - x = \frac{c^2 - (a - b)^2}{2a}.$$

L'hypothèse $a < b + c$ donne $c > a - b$. Il s'ensuit que $c^2 - (a - b)^2 > 0$, autrement dit $b > x$, d'où $b^2 > x^2$. On pose $h = \sqrt{b^2 - x^2}$. Sur la perpendiculaire à (BC) passant par H , soit A un point tel que $AH = h$ (voir la figure à la page précédente). Il reste à vérifier que $AB = c$ et $AC = b$.

Le théorème de Pythagore, appliqué au triangle rectangle ACH , donne

$$\begin{aligned} AC^2 &= CH^2 + AH^2 \\ &= x^2 + h^2, \\ \text{d'où } AC &= \sqrt{x^2 + h^2} \\ &= b \end{aligned}$$

et, appliqué au triangle rectangle ABH , donne

$$\begin{aligned} AB^2 &= BH^2 + AH^2 \\ &= (a - x)^2 + h^2, \\ &= a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2, \\ &= -a^2 + (2a^2 - 2ax) + b^2, \\ &= -a^2 + (a^2 - b^2 + c^2) + b^2 \\ &= c^2, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } AB = c.$$

Pour passer de la quatrième à la cinquième ligne, on a utilisé la relation $a - x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$ qui donne $2a^2 - 2ax = a^2 - b^2 + c^2$.

On a ainsi démontré que, étant donnés $0 < c \leq b \leq a$, il existe un triangle ABC vérifiant $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$ si $a < b + c$.

REMARQUE. Cette démonstration n'est pas à connaître.

II. Le triangle est-il rectangle ?

Dans la section précédente, on dispose d'un triangle rectangle dont on connaît la longueur de deux des côtés et l'on calcule la longueur du troisième côté.

Dans cette section, on dispose d'un triangle dont on connaît la longueur des trois côtés et l'on se demande s'il est rectangle (d'où le titre). La section précédente répond déjà à une partie de la question. En effet, le théorème de Pythagore affirme que : « Si un triangle est rectangle, alors les longueurs de ses côtés vérifient une certaine relation. » La contraposée de cette proposition est : « Si les longueurs des côtés d'un

triangle ne vérifient pas une certaine relation, alors ce triangle n'est pas rectangle. »

Pour pouvoir répondre complètement à la question, il nous faut la réciproque du théorème de Pythagore.

II.1. La réciproque du théorème de Pythagore

Propriété 6 (réciproque du théorème de Pythagore)

Soit ABC un triangle. Si

$$AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

alors ABC est rectangle en A .

REMARQUES. $\triangleright$ Soit ABC un triangle. Si

$$AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

alors ABC est rectangle en A . De même, si

$$BC^2 + AC^2 = AB^2,$$

alors ABC est rectangle en C . Si

$$BC^2 + AB^2 = AC^2,$$

alors ABC est rectangle en B .

$\triangleright$ En pratique, il n'est pas nécessaire de tester les trois relations, car au plus une peut être vérifiée.

II.2. Exemples numériques

Exemple 1. Soit EFG un triangle tel que $EF = 21$ cm, $EG = 29$ cm, $FG = 20$ cm. Le triangle EFG est-il rectangle ?

SOLUTION. On se place dans le triangle EFG dont le plus grand côté est $[EG]$. On a

$$\begin{aligned} EG^2 &= 29^2 & EF^2 + FG^2 &= 21^2 + 20^2 \\ &= 841, & &= 441 + 400 \\ & & &= 841. \end{aligned}$$

Ainsi, $EG^2 = EF^2 + FG^2$, donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en F .

REMARQUES. $\triangleright$ On commence par préciser quel est le plus grand côté du triangle considéré. Il est interdit de parler d'hypoténuse ici. Ce mot est réservé à un triangle rectangle et l'on ne sait pas si le triangle considéré est rectangle. C'est même la question posée.

$\triangleright$ On ne sait pas avant d'avoir fait le calcul si la relation sur les longueurs est vérifiée ou ne l'est pas. On doit donc faire deux calculs séparés.

- ▷ **Il faut utiliser des valeurs exactes.** Si vous utilisez des valeurs approchées pour faire ces calculs, vous êtes juste en train de faire n'importe quoi.
- ▷ Une fois seulement le calcul fait, on peut parler de triangle rectangle, si la relation sur les longueurs est vérifiée.

Exemple 2. Soit LMN un triangle tel que $LM = 11,2$ m, $LN = 15,1$ m, $MN = 18,8$ m. Le triangle LMN est-il rectangle ?

SOLUTION. On se place dans le triangle LMN dont le plus grand côté est $[MN]$. On a

$$\begin{aligned} MN^2 &= 18,8^2 & LM^2 + LN^2 &= 11,2^2 + 15,1^2 \\ &= 353,44, & &= 353,45. \end{aligned}$$

Ainsi, $MN^2 \neq LM^2 + LN^2$, donc, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle LMN n'est pas rectangle.

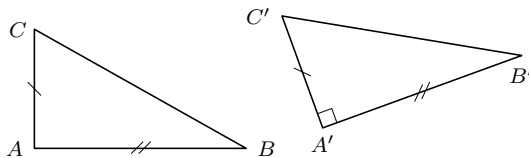
REMARQUES. ▷ Comme précédemment, on commence par préciser quel est le plus grand côté du triangle considéré.

▷ Comme précédemment, on fait deux calculs séparés.

▷ Il est inutile de vérifier les deux autres relations possibles, car on a commencé par préciser le plus grand côté du triangle.

II.3. Démonstration

Soit ABC un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Soit $A'B'C'$ un triangle rectangle en A' tel que $A'B' = AB$ et $A'C' = AC$.



D'après le théorème de Pythagore,

$$B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} B'C'^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= BC^2 \end{aligned}$$

et l'on en déduit que $B'C' = BC$, car $B'C' > 0$ et $BC > 0$. On associe les triangles ABC et $A'B'C'$ par

$$A \leftrightarrow A', \quad B \leftrightarrow B', \quad C \leftrightarrow C'.$$

Les triangles ABC et $A'B'C'$ vérifient la même condition C-C-C, donc ils sont égaux. Il s'ensuit que

$$\text{mes}(\widehat{CAB}) = \text{mes}(\widehat{C'A'B'}) = 90^\circ$$

et le triangle ABC est rectangle en A .

Exercices

Ex 1 (★). Démontrer la propriété 1.

Ex 2 (▣). Dans chaque cas, calculer la longueur du troisième côté et en donner, éventuellement, une valeur approchée au dixième près.

- Le triangle ABC est rectangle en B , $AB = 12$ m, $BC = 35$ m.
- Le triangle RST est rectangle en T , $RS = 65$ cm, $ST = 56$ cm.
- Le triangle FGH est rectangle en G , $FH = 89$ cm, $FG = 39$ cm.
- Le triangle MNP est rectangle en P , $MP = 15$ dm, $NP = 13$ dm.
- Le triangle XYZ est rectangle en Y , $YZ = 8$ m, $XZ = 25$ m.

Ex 3 (▣). Calculer le périmètre d'un losange dont les diagonales mesurent 48 cm et 14 cm.

Ex 4 (★). Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 10 cm. Soit $[AB]$ une corde de $\mathcal{C}$ et H le milieu de $[AB]$. Sachant que $OH = 6$ cm, calculer AB .

Ex 5 (★ ▣). Un parallélépipède rectangle a pour dimensions 5 cm, 12 cm et 84 cm. Calculer la longueur de ses diagonales.

Ex 6 (★). Les diagonales d'un cube ont pour longueur d . Exprimer l'aire totale de ce cube en fonction de d .

Ex 7 (★ ▣). Soit ADE un triangle rectangle en A tel que $AD = 5$ cm et $AE = 3$ cm. Soit B le point de la demi-droite $[AD)$ tel que $BA = 8$ cm. La parallèle à (DE) passant par B coupe (AE) en C .

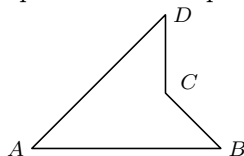
- Calculer DE . En donner une valeur approchée arrondie au mm près.
- Calculer AC .
- Calculer BC . En donner une valeur approchée arrondie au mm près.

Ex 8 (★★). Sur la figure suivante, $ABCD$ est un quadrilatère tel que

$$\triangleright \text{mes}(\widehat{CDA}) = \text{mes}(\widehat{DAB}) = \text{mes}(\widehat{ABC}) = 45^\circ,$$

$$\triangleright AC = 4 \text{ m}.$$

Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.



Ex 9 (★). Soient A , B , C et D quatre points distincts tels que les droites (AD) et (BC) soient perpendiculaires. Montrer que

$$BD^2 + CA^2 = CD^2 + AB^2.$$

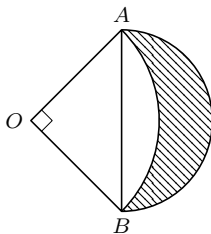
Ex 10 (★). Soit $ABCD$ un carré de centre O . Soient E et F deux points situés de part et d'autre du plan contenant le carré $ABCD$, sur la perpendiculaire à ce plan passant par O et tels que $OE = OF = OA$. Prouvez que les faces de l'octaèdre (polyèdre à huit faces) $ABCDEF$ sont des triangles équilatéraux.

Ex 11 (★★). Soit $ABCD A'B'C'D'$ un parallélépipède dont les segments $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ et $[DD']$ sont des arêtes. On suppose que les diagonales $[AC']$, $[CA']$, $[BD']$ et $[DB']$ ont la même longueur.

- Prouver que le quadrilatère $ABC'D'$ est un parallélogramme. (*Indication* : on pourra s'inspirer de la démonstration du petit théorème de Desargues, p. 62)
- En déduire que $ABC'D'$ est un rectangle.
- Montrer que $ABCD A'B'C'D'$ est un parallélépipède rectangle.

Ex 12 (★). Sur la figure suivante,

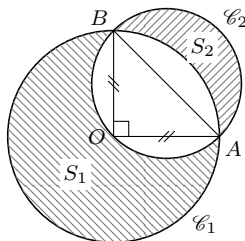
- ▷ le triangle OAB est isocèle et rectangle en O ,
- ▷ on a placé un demi-cercle de diamètre $[AB]$ et un arc de cercle d'extrémités A et B et de rayon OA sur le côté $[AB]$,
- ▷ la partie hachurée est délimitée par ces deux arcs.



Comparer l'aire de la surface hachurée et celle du triangle OAB .

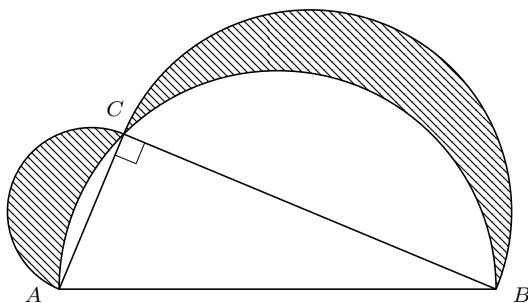
Ex 13 (★★). Sur la figure suivante,

- ▷ le triangle OAB est isocèle et rectangle en O ,
- ▷ le cercle $\mathcal{C}_1$ a pour centre O ,
- ▷ les surfaces hachurées S_1 et S_2 sont limitées par les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$,
- ▷ on note $\mathcal{A}_1$ l'aire de la surface S_1 et $\mathcal{A}_2$ l'aire de la surface S_2 .



Calculer $\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2}$.

Ex 14 (★★). Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est rectangle en C . Sur les côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$, on a placé un demi-cercle de diamètre égal à la longueur du côté correspondant.



Comparer l'aire de la surface hachurée (formée de deux lunules appelées les **lunules d'Hippocrate de Chios**) et l'aire du triangle ABC .

Ex 15 (★★). Soit ABC un triangle. Soient D et E deux points tels que $ABDE$ soit un parallélogramme situé à l'extérieur de ABC . Soient F et G deux points tels que $ACFG$ soit un parallélogramme situé à l'extérieur de ABC . Les droites (DE) et (FG) se coupent en un point H . Soit M le point tel que $BHAM$ soit un parallélogramme. Soit N le point tel que $CHAN$ soit un parallélogramme. Soient K et L les points d'intersection de (HA) respectivement avec $[BC]$ et $[MN]$.

- Prouver que $BCNM$ et $BKLM$ sont des parallélogrammes.
- Prouver que $\mathcal{A}_{ABDE} = \mathcal{A}_{BKLM}$.
- Montrer que $\mathcal{A}_{ABDE} + \mathcal{A}_{ACFG} = \mathcal{A}_{BCNM}$ (un **théorème de Pappus**).
- En déduire le **théorème de Pythagore**.

Ex 16 (★★★). Le but de cet exercice est de démontrer l'**identité du parallélogramme**. Si un parallélogramme a des côtés de longueur a et b et des diagonales de longueur d_1 et d_2 , alors $2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$.

- Vérifier l'identité du parallélogramme pour les rectangles.
- Soit $ABCD$ un parallélogramme qui n'est pas un rectangle. On pose $AD = BC = a$, $AB = CD = b$, $AC = d_1$ et $BD = d_2$. Soient X le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par D et Y le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par C .
 - Justifier que l'on peut supposer $a \leq b$ et $\widehat{BAD} < 90^\circ$.
 - Justifier que X se trouve sur la demi-droite $[AB)$, puis qu'il se trouve entre A et B .
 - Justifier que Y se trouve entre A et B .
- Démontrer l'identité du parallélogramme en appliquant le théorème de Pythagore aux triangles ADX , ACY et BDX . On pourra utiliser les égalités (valides pour tous nombres b et c) $(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$ et $(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$.

Ex 17 (★★). Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Soit E le point tel que $ABCE$ soit un parallélogramme. Soient P le milieu de $[AC]$ et Q le milieu de $[BD]$.

a) Prouver que

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2.$$

(*Indication* : on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.)

b) Montrer que $DE^2 = 4PQ^2$.

c) En déduire la **relation d'Euler pour un quadrilatère** :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2.$$

Ex 18 (★★★). Soit $ABCD A'B'C'D'$ un prisme dont les arêtes latérales sont $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ et $[DD']$ et une base $ABCD$ est un quadrilatère convexe.

a) Montrer que les diagonales $[AC']$ et $[A'C]$ du prisme sont sécantes. On appelle I leur point d'intersection. De même, on appelle J le point d'intersection des diagonales $[BD']$ et $[B'D]$.

b) Montrer que la somme des carrés des longueurs des arêtes du prisme $ABCD A'B'C'D'$ est égale à la somme des carrés des longueurs de ses diagonales augmentée de $8IJ^2$. (*Indication* : on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.)

Ex 19 (★). Soient ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A . On donne $AB = 5$ cm et $AC = 12$ cm. Calculer BC , BH , CH et AH .

Ex 20 (★★). Soient ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A .

a) Exprimer AH^2 en fonction de AB^2 et AC^2 .

b) Démontrer que $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

Ex 21 (★★■). Soit $ABCD$ un trapèze rectangle. Le côté $[AB]$ est perpendiculaire aux bases $[AD]$ et $[BC]$. On donne $AD = 12$ cm, $BC = 27$ cm et $CD = 39$ cm. Soit G le point de $[CD]$ tel que $CG = BC$. La perpendiculaire à (CD) passant par G coupe (AB) en I . Les droites (AB) et (CD) se coupent en un point E .

a) Calculer AB .

b) Montrer que le triangle ICD est rectangle.

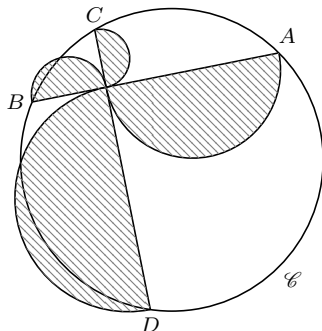
c) Calculer IG , IC , ID .

d) Montrer que le triangle AGB est rectangle.

e) Calculer EB et EC .

Ex 22 (★★). Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R . Soit P un point à l'intérieur de $\mathcal{C}$. On mène par P deux cordes $[AB]$ et $[CD]$ perpendiculaires. La corde $[DE]$ est telle que (AB) et (DE) soient parallèles.

- Comparer BD et AE .
- Montrer que ACE est un triangle rectangle.
- Exprimer $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$ en fonction de R .
- On place un demi-disque sur $[AP]$, $[BP]$, $[CP]$ et $[DP]$, comme sur la figure suivante.



Comparer l'aire de la partie hachurée et l'aire du disque limité par $\mathcal{C}$.

Ex 23 (★★★). Soit ABC un triangle tel que

$$\text{mes}(\widehat{ABC}) - \text{mes}(\widehat{ACB}) = 90^\circ.$$

Soit A' le point tel que $[AA']$ soit un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC .

- Démontrer que (AA') et (BC) sont parallèles.
- Prouver que $AB^2 + AC^2 = A'A^2$.
- Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC . Montrer que $AH^2 = HB \times HC$.

Ex 24 (▣). Dans chaque cas, le triangle considéré est-il rectangle ?

- Le triangle EFG vérifie $EG = 169$ dm, $FG = 120$ dm, $EF = 119$ dm.
- Le triangle IJK vérifie $IJ = 0,52$ cm, $JK = 3,4$ cm, $IK = 3,36$ cm.
- Le triangle LMN vérifie $LM = 3,8$ m, $LN = 7,71$ m, $MN = 6,71$ m.

Ex 25 (▣). Dans le triangle EFG , la perpendiculaire à (FG) issue de E coupe $[FG]$ en M . On donne $EM = 4$ cm, $MG = 3$ cm et $MF = 5,5$ cm.

- Calculer la longueur EG .
- Calculer la longueur EF .
- Le triangle EFG est-il rectangle ?

Ex 26 (★). Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 7$ cm et $AD = 6$ cm. Soient I le point de $[AD]$ tel que $AI = 2$ cm et M le point de $[AB]$ tel que $AM = 3$ cm.

- a) Calculer IM^2 , puis une valeur approchée au millimètre près de IM .
- b) Calculer IC^2 , puis une valeur approchée au millimètre près de IC .
- c) Calculer MC^2 , puis une valeur approchée au millimètre près de MC .
- d) Le triangle MIC est-il rectangle ?

Solutions des exercices du chapitre 22

Ex 1. Soit ABC un triangle rectangle en A . Au moins deux de ses angles sont aigus (ex. 10 du ch. 16), donc

$$\text{mes}(\widehat{BAC}) > \text{mes}(\widehat{BCA}) \quad \text{et} \quad \text{mes}(\widehat{BAC}) > \text{mes}(\widehat{ABC}).$$

On conclut avec la propriété 9 du chapitre 16 que $BC > AB$ et $BC > AC$.

Ex 2. a) Dans le triangle rectangle ABC , d'hypoténuse $[AC]$, le théorème de Pythagore donne

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 12^2 + 35^2 \\ &= 1\,369, \\ \text{donc } AC &= \sqrt{1\,369} \text{ m} \\ &= 37 \text{ m.} \end{aligned}$$

b) On se place dans le triangle rectangle RST , d'hypoténuse $[RS]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} RS^2 &= RT^2 + ST^2, \\ \text{soit } 65^2 &= RT^2 + 56^2, \\ \text{donc } RT^2 &= 65^2 - 56^2 \\ &= 1\,089, \\ \text{donc } RT &= \sqrt{1\,089} \text{ cm} \\ &= 33 \text{ cm.} \end{aligned}$$

- c) On se place dans le triangle rectangle FGH , d'hypoténuse $[FH]$.
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} FH^2 &= FG^2 + GH^2, \\ \text{soit} \quad 89^2 &= 39^2 + GH^2, \\ \text{donc} \quad GH^2 &= 89^2 - 39^2 \\ &= 6\,400, \\ \text{donc} \quad GH &= 80 \text{ cm.} \end{aligned}$$

- d) On se place dans le triangle rectangle MNP , d'hypoténuse $[MN]$.
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} MN^2 &= MP^2 + NP^2 \\ &= 15^2 + 13^2 \\ &= 394, \\ \text{donc} \quad MN &= \sqrt{394} \text{ dm} \\ &\approx 19,8 \text{ dm.} \end{aligned}$$

- e) On se place dans le triangle rectangle XYZ , d'hypoténuse $[XZ]$.
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} XZ^2 &= XY^2 + YZ^2, \\ \text{soit} \quad 25^2 &= XY^2 + 8^2, \\ \text{donc} \quad XY^2 &= 25^2 - 8^2 \\ &= 561, \\ \text{donc} \quad XY &= \sqrt{561} \text{ m} \\ &\approx 23,7 \text{ m.} \end{aligned}$$

Ex 3. Soit $ABCD$ un losange dont les diagonales mesurent 48 cm et 14 cm. Soit O l'intersection des diagonales. On rappelle que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et ont le même milieu. Ainsi, le triangle ABO est rectangle en O , d'hypoténuse $[AB]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} AB^2 &= AO^2 + OB^2 \\ &= 24^2 + 7^2 \\ &= 625, \\ \text{donc} \quad AB &= 25 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Le périmètre du losange $ABCD$ est égal à $4 \times AB = 100 \text{ cm}$.

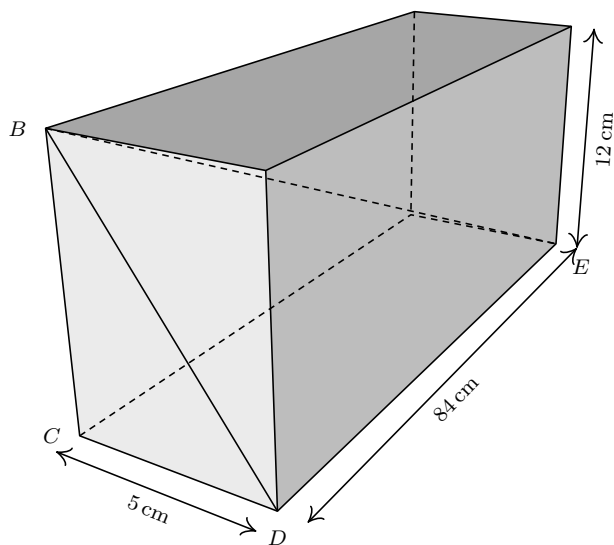
Ex 4. Le triangle ABO est isocèle en O et $[OH]$ est la médiane issue de O dans ce triangle, donc (OH) est aussi la médiatrice de $[AB]$. On se

place dans le triangle AOH rectangle en H , d'hypoténuse $[OA]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} OA^2 &= OH^2 + AH^2, \\ \text{soit } 10^2 &= 6^2 + AH^2, \\ \text{donc } AH^2 &= 10^2 - 6^2 \\ &= 64, \\ \text{donc } AH &= 8 \text{ cm.} \end{aligned}$$

On conclut que $AB = 16$ cm.

Ex 5. On appelle $ABCDEFGH$ le parallélépipède rectangle. Sur la figure suivante, seuls les sommets B , C , D et E sont désignés. On doit calculer BE .



On considère d'abord le triangle BCD rectangle en C , d'hypoténuse $[BD]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 \\ &= 12^2 + 5^2 \\ &= 169. \end{aligned}$$

La longueur BD n'est pas nécessaire pour calculer BE . On a juste besoin de BD^2 . On se place maintenant dans le triangle BDE rectangle en D ,

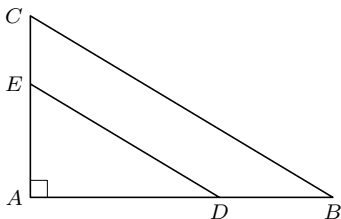
d'hypoténuse $[BE]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} BE^2 &= BD^2 + DE^2 \\ &= 169 + 84^2 \\ &= 7\,225, \\ \text{donc } BE &= \sqrt{7\,225} \text{ cm} \\ &= 85 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Les diagonales du parallélépipède rectangle mesurent 85 cm.

Ex 6. On note c la longueur des côtés du cube et d' la longueur des diagonales des faces de celui-ci. En procédant comme à l'exercice précédent, on trouve $d'^2 = 2c^2$ puis $d^2 = d'^2 + c^2$, soit $d^2 = 3c^2$. L'aire totale du cube est égale à $6c^2 = 2d^2$.

Ex 7. Un schéma ne peut pas nuire.



- a) On se place dans le triangle ADE rectangle en A , d'hypoténuse $[DE]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 \\ &= 5^2 + 3^2 \\ &= 34, \\ \text{donc } DE &= \sqrt{34} \text{ cm} \\ &\approx 5,8 \text{ cm.} \end{aligned}$$

- b) Les points A, D, B sont alignés. Les points A, E, C sont alignés. Les droites (DE) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

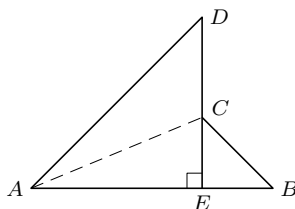
d'où

$$\begin{aligned} \frac{AC}{AE} &= \frac{AB}{AD}, \\ \text{soit } \frac{AC}{3} &= \frac{8}{5}, \\ \text{donc } AC &= \frac{24}{5} \text{ cm} \\ &= 4,8 \text{ cm.} \end{aligned}$$

- c) On peut utiliser le théorème de Pythagore ou le théorème de Thalès pour calculer BC . Autant choisir la seconde option, puisque la rédaction est déjà faite à la question précédente. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{BC}{DE} &= \frac{AB}{AD}, \\ \text{soit } \frac{BC}{\sqrt{34}} &= \frac{8}{5}, \\ \text{donc } BC &= \frac{8}{5}\sqrt{34} \text{ cm} \\ &\approx 9,3 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Ex 8. Soit E l'intersection des droites (CD) et (AB) .



Le triangle ADE est isocèle, car il a deux angles de même mesure. De plus, la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° , donc $\text{mes}(\widehat{AED}) = 90^\circ$. Ainsi, ADE est isocèle et rectangle en E . On en déduit que $\text{mes}(\widehat{BEC}) = 90^\circ$, d'où $\text{mes}(\widehat{ECB}) = 45^\circ$. De même, BCE est isocèle et rectangle en E . Soient $\mathcal{A}_{ABCD}$, $\mathcal{A}_{ADE}$ et $\mathcal{A}_{BCE}$ les aires respectives de $ABCD$, ADE et BCE . On a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABCD} &= \mathcal{A}_{ADE} + \mathcal{A}_{BCE} \\ &= \frac{AE \times DE}{2} + \frac{BE \times CE}{2} \\ &= \frac{AE^2 + CE^2}{2}.\end{aligned}$$

On se place dans le triangle ACE rectangle en E , d'hypoténuse $[AC]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$AC^2 = AE^2 + CE^2,$$

d'où

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC^2}{2}.$$

Pour $AC = 4 \text{ m}$, on obtient $\mathcal{A}_{ABCD} = 8 \text{ m}^2$.

Ex 9. Soit O le point d'intersection de (AD) et (BC) . Les triangles ABO , ACO , DBO et DCO sont rectangles en O , respectivement d'hypoténuse $[AB]$, $[AC]$, $[DB]$, $[DC]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$AB^2 = AO^2 + BO^2, \quad (1)$$

$$AC^2 = AO^2 + CO^2, \quad (2)$$

$$DB^2 = DO^2 + BO^2, \quad (3)$$

$$DC^2 = DO^2 + CO^2. \quad (4)$$

En additionnant membre à membre les égalités (1) et (4), on obtient

$$AB^2 + DC^2 = AO^2 + BO^2 + DO^2 + CO^2$$

et, en additionnant membre à membre les égalités (2) et (3), on obtient

$$AC^2 + DB^2 = AO^2 + CO^2 + DO^2 + BO^2.$$

Ainsi, $AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2$.

Dans le cas où, par exemple, les points O et D sont confondus, on retranche membre à membre les égalités (1) et (2), pour obtenir

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2,$$

soit $AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2$.

Ex 10. Le triangle OAB est isocèle et rectangle en O , d'hypoténuse $[AB]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 \\ &= 2OA^2. \end{aligned}$$

De même, le triangle OAE est isocèle et rectangle en O , d'hypoténuse $[AE]$, donc

$$\begin{aligned} AE^2 &= OA^2 + OE^2 \\ &= 2OA^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $AB^2 = AE^2$, donc $AB = AE$ (car il s'agit de nombres positifs). On démontre de même que toutes les arêtes de l'octaèdre $ABCDEF$ ont pour longueur AB , donc toutes ses faces sont des triangles équilatéraux.

Ex 11. a) La démonstration du petit théorème de Desargues (p. 62) n'utilise pas le fait que la figure considérée alors est plane. On peut donc reprendre cette démonstration sans modification dans le cas présent.

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, donc (AB) et (CD) sont parallèles. Le quadrilatère $CC'D'D$ est un parallélogramme, donc (CD) et $(C'D')$ sont parallèles. Il s'ensuit que (AB) et $(C'D')$ sont parallèles.

Soient X l'intersection des diagonales de $ABCD$ et Y l'intersection des diagonales de $CC'D'D$.

On se place dans le triangle ACD' . Le point X est le milieu de $[AC]$ et le point Y est le milieu de $[CD']$. D'après la propriété de la droite des milieux, les droites (XY) et (AD') sont parallèles. De même, en considérant le triangle BDC' , on conclut que les droites (XY) et (BC') sont parallèles.

Il s'ensuit que les droites (AD') et (BC') sont parallèles. Ainsi, les côtés du quadrilatère $ABC'D'$ sont deux à deux parallèles, donc il s'agit d'un parallélogramme.

- b) Les diagonales $[AC']$ et $[BD']$ du parallélogramme $ABC'D'$ ont la même longueur, donc il s'agit d'un rectangle. De même, $CDA'B'$ est un rectangle.
- c) Dans le triangle rectangle ABC' d'hypoténuse $[AC']$, le théorème de Pythagore donne

$$AC'^2 = AB^2 + BC'^2,$$

d'où

$$BC'^2 = AC'^2 - AB^2.$$

De même, en considérant le triangle rectangle $A'B'C$, on obtient

$$CB'^2 = A'C^2 - A'B'^2.$$

Mais $AC' = A'C$ et $AB = A'B'$, car $ABB'A'$ est un parallélogramme. Il s'ensuit que $BC'^2 = CB'^2$, d'où $BC' = CB'$ (car il s'agit de longueurs, donc de nombres positifs). Ainsi, les diagonales du parallélogramme $BCC'B'$ ont la même longueur, donc il s'agit d'un rectangle.

On démontre de la même façon que toutes les faces du parallélépipède $ABCD A'B'C'D'$ sont des rectangles, donc $ABCD A'B'C'D'$ est un parallélépipède rectangle.

Ex 12. On se place dans le triangle OAB rectangle en O , d'hypoténuse $[AB]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 \\ &= 2OA^2, \end{aligned}$$

car OAB est isocèle en O . On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface hachurée, $\mathcal{A}_{OAB}$ l'aire du triangle OAB , $\mathcal{A}_1$ l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$ et $\mathcal{A}_2$ l'aire du quart de disque de rayon $[OA]$ et de centre O . On a

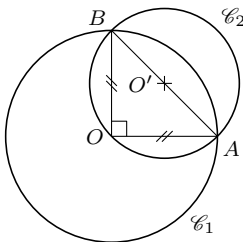
$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2 & \mathcal{A}_2 &= \frac{\pi}{4} OA^2 \\ &= \pi \frac{AB^2}{8}, & &= \pi \frac{AB^2}{8} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_{OAB},$$

d'où $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{OAB}$.

Ex 13. Sur la figure suivante, le cercle $\mathcal{C}_1$ a pour centre O , le cercle $\mathcal{C}_2$ a pour centre O' . Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en A et B . On note R le rayon de $\mathcal{C}_1$.



On prouve d'abord que O' est le milieu de $[AB]$. Le triangle AOB est rectangle en O , donc O se trouve sur le cercle de diamètre $[AB]$. Mais les points A , B et O appartiennent à $\mathcal{C}_2$, donc $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}_2$. Il s'ensuit que le milieu de $[AB]$ est le centre de $\mathcal{C}_2$.

D'après l'exercice précédent, $AB^2 = 2R^2$. On en déduit que l'aire du disque de bord $\mathcal{C}_2$ est égale à

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'' &= \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 \\ &= \pi \frac{AB^2}{4} \\ &= \pi \frac{R^2}{2}. \end{aligned}$$

Toujours d'après l'exercice précédent, $\mathcal{A}_2 = \frac{R^2}{2}$. De plus, l'aire du disque de bord $\mathcal{C}_1$ est égale à $\mathcal{A}' = \pi R^2$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \mathcal{A}' - \mathcal{A}'' + \mathcal{A}_2 \\ &= \pi R^2 - \pi \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} \\ &= \frac{R^2}{2}(\pi + 1). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = \pi + 1.$$

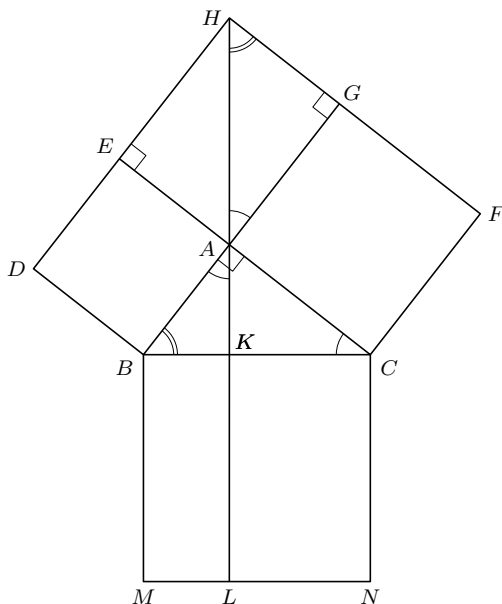
Ex 14. L'aire de la surface formée par le triangle ABC et les demi-disques placés sur les côtés $[AC]$ et $[BC]$ est égale à

$$\mathcal{A}_{ABC} + \pi \frac{AC^2}{8} + \pi \frac{BC^2}{8}.$$

- b) Soit P le point d'intersection de (DE) et (MB) . Les côtés de $BAHP$ sont deux à deux parallèles, donc il s'agit d'un parallélogramme. On déduit de l'ex. 17 du ch. 13 que $\mathcal{A}_{ABDE} = \mathcal{A}_{BAHP}$. De plus, $\mathcal{A}_{BAHP} = 2 \times \mathcal{A}_{BAH}$ et, d'après les ex. 15 et 16 du ch. 13, $\mathcal{A}_{BAH} = \mathcal{A}_{KLM}$. Il reste à noter que $\mathcal{A}_{BKLM} = 2 \times \mathcal{A}_{KLM}$ pour conclure que $\mathcal{A}_{ABDE} = \mathcal{A}_{BKLM}$.
- c) De même, $\mathcal{A}_{ACFG} = \mathcal{A}_{CKLN}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{BCNM} &= \mathcal{A}_{BKLM} + \mathcal{A}_{CKLN} \\ &= \mathcal{A}_{ABDE} + \mathcal{A}_{ACFG}.\end{aligned}$$

- d) On suppose dans cette question que ABC est un triangle rectangle en A . On choisit les points D et E de sorte que $ABDE$ soit un carré. De même, on choisit les points F et G de sorte que $ACFG$ soit un carré. On obtient la figure suivante.



On associe les triangles ABC et GHA par

$$A \leftrightarrow G, \quad B \leftrightarrow H, \quad C \leftrightarrow A.$$

On a $AG = AC$ et $\widehat{BAC} = \widehat{HGA}$. De plus, le quadrilatère $AEHG$ a trois angles droits, donc il s'agit d'un rectangle. Ainsi, $HG = EA$, d'où $HG = BA$. Les triangles ABC et GHA vérifient la même condition C-A-C, donc ils sont égaux. On en déduit que $AH = BC$, $\widehat{CBA} = \widehat{AHG}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{HAG}$. Mais $\widehat{BAK} = \widehat{HAG}$, donc $\widehat{BKA} = \widehat{HGA}$,

autrement dit les droites (AK) et (BC) sont perpendiculaires. Il s'ensuit que le parallélogramme $BCNM$ est un rectangle. De plus, $AH = KL$, donc $BC = KL$ et le rectangle $BCNM$ est en fait un carré. Le théorème de Pappus démontré à la question précédente donne alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Ex 16. a) Soit $ABCD$ un rectangle. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ABC donne

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

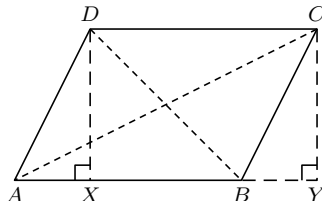
De même, dans le triangle rectangle ABD , on obtient

$$BD^2 = AB^2 + AD^2.$$

En additionnant membre à membre les deux égalités précédentes et en notant que $BC = AD$, on obtient

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2).$$

- b) i) Si $AD > AB$, on renomme les points A, B, C et D de sorte que $AD \leq AB$. Le quadrilatère $ABCD$ n'est pas un rectangle, donc $\widehat{BAD} \neq 90^\circ$. Les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{CDA}$ sont supplémentaires. Si $\widehat{BAD} > 90^\circ$, alors on permute les rôles de A et D d'une part, de B et C d'autre part. On se ramène ainsi au cas où $0^\circ < \widehat{BAD} < 90^\circ$.



- ii) Le point X n'est pas confondu avec A , car $\widehat{BAD} < 90^\circ$. Si X ne se trouve pas sur $[AB]$, alors les angles $\widehat{XAD}$ et $\widehat{BAD}$ sont supplémentaires, donc $\widehat{XAD} > 90^\circ$. Mais le triangle XAD est rectangle en X , donc la somme des mesures des angles de ce triangle est strictement supérieure à 180° , contradiction. On conclut que X se trouve sur $[AB]$. De plus, $XA < AD$, car XAD est rectangle en X . On en déduit que $XA < AB$, autrement dit X se trouve entre A et B .
- iii) Le point Y se trouve sur (AB) . S'il se trouve sur $[BA]$, alors $\widehat{CBY} > 90^\circ$. Mais le triangle CBY est rectangle en Y , donc la somme des mesures des angles de ce triangle est strictement supérieure à 180° , contradiction. On conclut que Y ne se trouve pas sur $[BA]$, autrement dit B se trouve entre A et Y .

iv) On pose $DX = h$ et $AX = c$. Le quadrilatère $XYCD$ est un rectangle, donc $CY = h$. De plus, $XY = AB$, donc $BY = c$. On va utiliser trois fois le théorème de Pythagore.

▷ Le triangle ADX est rectangle en X . D'après le théorème de Pythagore, on a

$$a^2 = c^2 + h^2.$$

▷ De même, dans le triangle ACY rectangle en Y , on a

$$d_1^2 = h^2 + (b + c)^2.$$

▷ De même, dans le triangle BDX rectangle en X , on a

$$d_2^2 = h^2 + (b - c)^2.$$

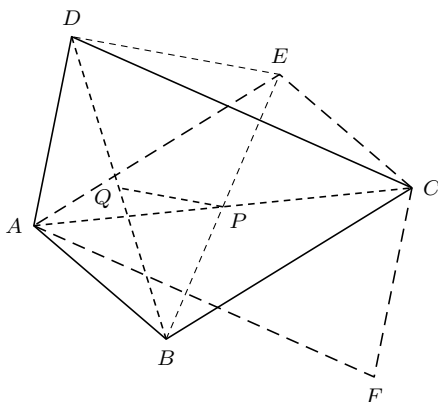
On additionne membre à membre les deux dernières égalités et l'on utilise les identités données en indication pour obtenir

$$\begin{aligned} d_1^2 + d_2^2 &= 2h^2 + (b + c)^2 + (b - c)^2 \\ &= 2h^2 + b^2 + 2bc + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 \\ &= 2h^2 + 2b^2 + 2c^2 \end{aligned}$$

et la première égalité obtenue plus haut permet de conclure que

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Ex 17. a) Soit F le point tel que $AFCD$ soit un parallélogramme. Ses diagonales $[AC]$ et $[FD]$ ont le même milieu.



L'identité du parallélogramme (voir l'exercice précédent) donne

$$2CD^2 + 2DA^2 = AC^2 + DF^2.$$

De plus, $ABCE$ est un parallélogramme, donc ses diagonales $[AC]$ et $[BE]$ ont le même milieu. On en déduit que les diagonales $[BE]$

et $[FD]$ de $BDEF$ ont le même milieu, donc ce quadrilatère est un parallélogramme. L'identité du parallélogramme donne

$$2BD^2 + 2DE^2 = BE^2 + DF^2.$$

En soustrayant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$2CD^2 + 2DA^2 - 2BD^2 - 2DE^2 = AC^2 - BE^2.$$

Enfin, L'identité du parallélogramme appliquée à $ABCE$ donne

$$2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BE^2.$$

En additionnant membre à membre ces deux dernières égalités, on obtient

$$2AB^2 + 2BC^2 + 2CD^2 + 2DA^2 - 2BD^2 - 2DE^2 = 2AC^2,$$

soit

$$2AB^2 + 2BC^2 + 2CD^2 + 2DA^2 = 2AC^2 + 2BD^2 + 2DE^2.$$

Après division par 2 des deux membres, on arrive à

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2.$$

- b) Les diagonales du parallélogramme $ABCE$ ont le même milieu, donc P est aussi le milieu de $[BE]$. D'après la propriété de la droite des milieux, appliquée au triangle BDE , on a $2PQ = DE$. En élevant au carré chaque membre, on obtient $DE^2 = 4PQ^2$.

- c) Il s'ensuit que

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2.$$

Ex 18. a) La démonstration se fait comme à la question a) de l'exercice 11. Le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme, donc (AA') et $(B'B')$ sont parallèles. Le quadrilatère $BCC'B'$ est un parallélogramme, donc (BB') et (CC') sont parallèles. Il s'ensuit que (AA') et (CC') sont parallèles.

Soient X l'intersection des diagonales de $ABB'A'$ et Y l'intersection des diagonales de $BCC'B'$.

On se place dans le triangle ACB' . Le point X est le milieu de $[AB']$ et le point Y est le milieu de $[B'C]$. D'après la propriété de la droite des milieux, les droites (XY) et (AC) sont parallèles. De même, en considérant le triangle $A'C'B$, on conclut que les droites (XY) et $(A'C')$ sont parallèles.

Il s'ensuit que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles. Ainsi, les côtés du quadrilatère $ACC'A'$ sont deux à deux parallèles, donc il s'agit d'un parallélogramme. Il s'ensuit que ses diagonales ont le même milieu, le point I .

- b) $\triangleright$ Soient I_0 le milieu de $[AC]$ et J_0 le milieu de $[BD]$. On déduit de la propriété de la droite des milieux appliquée au triangle ACA' que (AA') et (II_0) sont parallèles et que $AA' = 2II_0$. De même, en considérant le triangle BDB' , on conclut que (BB') et (JJ_0) sont parallèles et que $BB' = 2JJ_0$. Mais (AA') et (BB') sont parallèles et $AA' = BB'$, donc (II_0) et (JJ_0) sont parallèles et $II_0 = JJ_0$. De plus, les points I et J se trouvent du même côté du plan contenant $ABCD$ (ils se trouvent à l'intérieur du prisme), donc le quadrilatère II_0J_0J n'est pas croisé. On en déduit qu'il s'agit d'un parallélogramme, d'où $IJ = I_0J_0$.
- $\triangleright$ On applique l'identité du parallélogramme et la relation d'Euler démontrée aux exercices précédents. Dans le parallélogramme $AA'C'C$, on obtient

$$2AA'^2 + 2AC^2 = AC'^2 + A'C^2.$$

Dans le parallélogramme $BB'D'D$, on obtient

$$2BB'^2 + 2BD^2 = BD'^2 + B'D^2.$$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on a

$$4AA'^2 + 2(AC^2 + BD^2) = AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2.$$

Dans le quadrilatère $ABCD$, on obtient

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 &= AC^2 + BD^2 + 4I_0J_0^2 \\ &= AC^2 + BD^2 + 4IJ^2, \end{aligned}$$

d'où

$$2(AC^2 + BD^2) = 2(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2) - 8IJ^2.$$

En reportant dans l'égalité trouvée précédemment on arrive à

$$\begin{aligned} 4AA'^2 + 2(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2) - 8IJ^2 \\ = AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 4AA'^2 + 2(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2) \\ = AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2 + 8IJ^2. \end{aligned}$$

Le premier membre est égal à la somme des carrés des longueurs des arêtes du prisme. Le second membre est égal à la somme des carrés des longueurs des diagonales du prisme augmentée de $8IJ^2$.

Ex 19. Une figure se trouve dans le cours au début de la seconde démonstration du théorème de Pythagore. On se place dans le triangle ABC rectangle en A , d'hypoténuse $[BC]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 5^2 + 12^2 \\ &= 169, \end{aligned}$$

$$\text{donc } BC = 13 \text{ cm.}$$

On utilise les relations

$$BH = \frac{AB^2}{BC} \quad \text{et} \quad CH = \frac{AC^2}{BC}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} BH &= \frac{5^2}{13} \\ &= \frac{25}{13} \text{ cm,} \end{aligned} \quad \begin{aligned} CH &= \frac{12^2}{13} \\ &= \frac{144}{13} \text{ cm.} \end{aligned}$$

On utilise la relation $AH^2 = BH \times CH$ pour conclure que

$$AH^2 = \frac{5^2}{13} \times \frac{12^2}{13}$$

et

$$AH = \frac{60}{13} \text{ cm.}$$

Ex 20. Une figure se trouve dans le cours au début de la seconde démonstration du théorème de Pythagore.

- a) L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{AB \times AC}{2}$. Elle est aussi égale à $\frac{AH \times BC}{2}$. On en déduit que $AB \times AC = AH \times BC$. En élevant au carré les deux membres de cette égalité, on obtient

$$AB^2 \times AC^2 = AH^2 \times BC^2.$$

De plus, le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ABC donne

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Il s'ensuit que

$$AB^2 \times AC^2 = AH^2 \times (AB^2 + AC^2), \quad (*)$$

d'où

$$AH^2 = \frac{AB^2 \times AC^2}{AB^2 + AC^2}.$$

- c) Le triangle CDI est rectangle en I et G est le pied de la hauteur issue de I , donc $GI^2 = CG \times DG$, d'où

$$\begin{aligned} GI &= \sqrt{27 \times 12} \\ &= 18 \text{ cm.} \end{aligned}$$

On a aussi $CD \times CG = CI^2$, d'où

$$\begin{aligned} CI &= \sqrt{39 \times 27} \\ &= 9\sqrt{13} \text{ cm,} \end{aligned}$$

et $CD \times DG = DI^2$, d'où

$$\begin{aligned} DI &= \sqrt{39 \times 12} \\ &= 6\sqrt{13} \text{ cm.} \end{aligned}$$

REMARQUE. Les égalités $\sqrt{1053} = 9\sqrt{13}$ et $\sqrt{468} = 6\sqrt{13}$ seront justifiées au ch. 34.

- d) On associe les triangles BCI et CGI par

$$B \leftrightarrow G, \quad C \leftrightarrow C, \quad I \leftrightarrow I.$$

Par hypothèse, $BC = GC$ et $\widehat{CBI} = \widehat{CGI} = 90^\circ$. De plus, ces triangles ont le côté $[CI]$ en commun, donc ils vérifient le cas d'égalité des triangles rectangles. On en déduit qu'ils sont égaux, d'où $BI = GI$ (on peut aussi appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle BCI). De même, en considérant les triangles DGI et DAI , on obtient $AI = GI$. Ainsi, les points A , B et G se trouvent sur un même cercle de centre I . De plus, les points A , B et I sont alignés, donc I est le milieu de $[AB]$. On en déduit que G se trouve sur le cercle de diamètre de $[AB]$, donc ABG est rectangle en G .

- e) $\triangleright$ Les points C, F, B sont alignés.
 $\triangleright$ Les points C, D, E sont alignés.
 $\triangleright$ Les droites (FD) et (BE) sont parallèles, car elles sont perpendiculaires à (BC) .

D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CD}{CE} = \frac{FD}{BE}.$$

L'égalité $\frac{CF}{CB} = \frac{CD}{CE}$ donne

$$\begin{aligned} CE &= \frac{27 \times 39}{15} \\ &= 70,2 \text{ cm} \end{aligned}$$

d) L'aire du demi-disque de diamètre $[AP]$ est

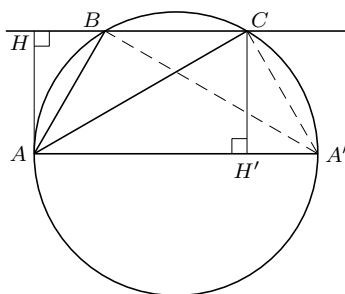
$$\frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{AP}{2} \right)^2 = \pi \frac{AP^2}{8}.$$

L'aire de la partie hachurée est donc

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{8} (AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2) &= \frac{\pi}{8} \times 4R^2 \\ &= \frac{\pi}{2} R^2. \end{aligned}$$

Ainsi, l'aire de la partie hachurée est égale à la moitié de l'aire du disque limité par $\mathcal{C}$.

Ex 23. On commence par faire une figure.



a) Par hypothèse, $\text{mes}(\widehat{ABC}) = \text{mes}(\widehat{ACB}) + 90^\circ$. Le point C se trouve sur le cercle de diamètre $[AA']$, donc ACA' est rectangle en C et la relation de Chasles donne

$$\begin{aligned} \text{mes}(\widehat{A'CB}) &= \text{mes}(\widehat{A'CA}) + \text{mes}(\widehat{ACB}) \\ &= \text{mes}(\widehat{ACB}) + 90^\circ \\ &= \text{mes}(\widehat{ABC}). \end{aligned}$$

De même, le triangle ABA' est rectangle en B et l'on a

$$\begin{aligned} \text{mes}(\widehat{A'BC}) &= \text{mes}(\widehat{ABC}) - \text{mes}(\widehat{ABA'}) \\ &= \text{mes}(\widehat{ABC}) - 90^\circ \\ &= \text{mes}(\widehat{ACB}). \end{aligned}$$

On en déduit que les triangles ABC et $A'BC$ vérifient la même relation C-A-A, donc ils sont égaux, d'où $BA = CA'$. Il s'ensuit que les deux triangles rectangles ABA' et ACA' sont égaux par le cas d'égalité des triangles rectangles. Ainsi, $A'B = AC$ et

$$\text{mes}(\widehat{BAA'}) = \text{mes}(\widehat{CA'A}).$$

On conclut avec la question d) de l'exercice 10 du chapitre 17 que les droites (AA') et (BC) sont parallèles.

- b) On se place dans le triangle ABA' rectangle en B , d'hypoténuse $[AA']$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$A'A^2 = AB^2 + A'B^2.$$

On a montré précédemment que $A'B = AC$, donc on conclut que

$$AB^2 + AC^2 = A'A^2.$$

- c) Soit H' le pied de la hauteur issue de C dans le triangle rectangle ACA' . On a

$$H'C^2 = AH' \times A'H'.$$

Les côtés de $AHCH'$ sont deux à deux parallèles, donc ce quadrilatère est un parallélogramme. De plus, il a un angle droit, donc il s'agit d'un rectangle. Ainsi, $H'C = AH$ et $AH' = HC$. De plus, les triangles HBA et $H'A'C$ vérifient le cas d'égalité des triangles rectangles, donc ils sont égaux, d'où $H'A' = HB$. Il s'ensuit que

$$AH^2 = HB \times HC.$$

Ex 24. a) Le plus grand côté du triangle EFG est $[EG]$. On a

$$\begin{aligned} EG^2 &= 169^2 & EF^2 + FG^2 &= 119^2 + 120^2 \\ &= 28\,561, & &= 28\,561. \end{aligned}$$

Ainsi, $EG^2 = EF^2 + FG^2$, donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, EFG est rectangle en F .

- b) Le plus grand côté du triangle IJK est $[JK]$. On a

$$\begin{aligned} JK^2 &= 3,4^2 & IJ^2 + IK^2 &= 0,52^2 + 3,36^2 \\ &= 11,56, & &= 0,270\,4 + 11,289\,6 \\ & & &= 11,56. \end{aligned}$$

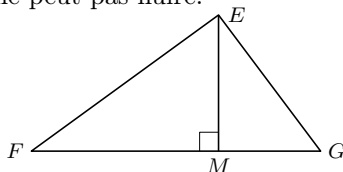
Ainsi, $JK^2 = IJ^2 + IK^2$, donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, IJK est rectangle en I .

- c) Le plus grand côté du triangle LMN est $[LN]$. On a

$$\begin{aligned} LN^2 &= 7,71^2 & LM^2 + MN^2 &= 3,8^2 + 6,71^2 \\ &= 59,444\,1, & &= 14,44 + 45,024\,1 \\ & & &= 59,464\,1. \end{aligned}$$

Ainsi, $LN^2 \neq LM^2 + MN^2$, donc, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, LMN n'est pas rectangle.

Ex 25. Un schéma ne peut pas nuire.



- a) On se place dans le triangle EMG rectangle en M , d'hypoténuse $[EG]$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} EG^2 &= EM^2 + MG^2 \\ &= 4^2 + 3^2 \\ &= 25, \end{aligned}$$

donc $EG = 5$ cm.

- b) De même, dans le triangle EMF rectangle en M , d'hypoténuse $[EF]$, on a

$$\begin{aligned} EF^2 &= EM^2 + MF^2 \\ &= 4^2 + 5,5^2 \\ &= 46,25, \end{aligned}$$

donc $EF = \sqrt{46,25}$ cm.

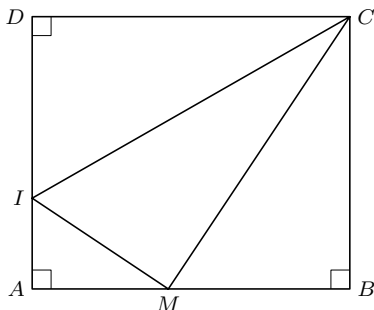
- c) On se place dans le triangle EFG , dont le plus grand côté est $[FG]$.

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad FG^2 &= 8,5^2 & EF^2 + EG^2 &= 46,25 + 25 \\ &= 72,25, & &= 71,25. \end{aligned}$$

Ainsi, $FG^2 \neq EF^2 + EG^2$, donc, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, EFG n'est pas rectangle.

REMARQUE. On utilise les valeurs de EF^2 et EG^2 trouvées aux deux questions précédentes. Les valeurs de EF et EG ne servent à rien pour cette question et encore moins la valeur approchée de EF qui n'a rien à faire ici.

Ex 26. On obtient le schéma suivant.



- a) On se place dans le triangle AIM rectangle en A , d'hypoténuse $[IM]$.
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} IM^2 &= AM^2 + AI^2 \\ &= 3^2 + 2^2 \\ &= 13, \\ \text{donc } IM &= \sqrt{13} \text{ cm} \\ &\approx 3,6 \text{ cm.} \end{aligned}$$

- b) De même, dans le triangle CDI rectangle en D , d'hypoténuse $[CI]$,
on a

$$\begin{aligned} CI^2 &= CD^2 + DI^2 \\ &= 7^2 + 4^2 \\ &= 65, \\ \text{donc } CI &= \sqrt{65} \text{ cm} \\ &\approx 8,1 \text{ cm.} \end{aligned}$$

- c) De même, dans le triangle BCM rectangle en B , d'hypoténuse $[CM]$,
on a

$$\begin{aligned} CM^2 &= BC^2 + BM^2 \\ &= 6^2 + 4^2 \\ &= 52, \\ \text{donc } CM &= \sqrt{52} \text{ cm} \\ &\approx 7,2 \text{ cm.} \end{aligned}$$

- d) On se place dans le triangle CMI , dont le plus grand côté est $[CI]$.
On a

$$\begin{aligned} CI^2 &= 65, \quad CM^2 + IM^2 = 52 + 13 \\ &= 65. \end{aligned}$$

Ainsi, $CI^2 = CM^2 + IM^2$, donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle CMI est rectangle en M .

REMARQUE. On a utilisé les valeurs exactes de CI^2 , CM^2 et IM^2 trouvées aux questions précédentes. Les valeurs de CI , CM et IM ne servent à rien pour la dernière question. Si vous avez utilisé les valeurs approchées demandées aux questions précédentes, c'est pire ! Dans ce cas, vous allez conclure que le triangle CMI n'est pas rectangle... et là, c'est le drame ! Cet exercice a été donné au brevet il y a quelques années.