

# Table des matières

Avant-propos	v
--------------	---

## I Modèles épidémiques à coefficients constants 1

### Chapitre 1. Modèle S-I-R 3

1.1. Équations	3
1.2. Taille finale de l'épidémie	6
1.3. Pic épidémique	9
1.3.1. Date du pic épidémique.	11
1.3.2. Étude de la fonction $f(\mathcal{R}_0)$ .	14
1.3.3. Remarque.	17
1.4. Approximation quand la reproductivité est proche de 1	18

### Chapitre 2. Modèle S-E-I-R 21

2.1. Équations	21
2.2. Pic épidémique	24
2.3. Appendice : systèmes différentiels linéaires coopératifs	27

### Chapitre 3. La reproductivité 31

3.1. Systèmes d'équations différentielles	31
3.2. Une équation aux dérivées partielles	38
3.3. Appendice : matrices positives	41

### Chapitre 4. Début de l'épidémie de coronavirus en France 43

4.1. Un modèle	43
4.2. Deuxième phase avec une intervention drastique	47
4.3. Une généralisation	51
4.4. Estimation du paramètre de réduction	53
4.5. Appendice : une période infectieuse non exponentielle	55

### Chapitre 5. Modèles stochastiques 57

5.1. Probabilité d'extinction des épidémies	57
5.1.1. Des processus de branchement.	57
5.1.2. Exemples.	59
5.2. Modèle S-I-S	61

## II Modèles déterministes à coefficients périodiques 67

<b>Chapitre 6. Modèles matriciels périodiques</b>	<b>69</b>
6.1. La reproductivité . . . . .	69
6.2. Sensibilité du taux de croissance . . . . .	78
6.3. Inégalités entre la reproductivité et le taux de croissance . . . . .	82
6.4. Une fonction monotone . . . . .	84
<b>Chapitre 7. Modèles périodiques en temps continu</b>	<b>87</b>
7.1. La reproductivité . . . . .	87
7.2. Systèmes différentiels . . . . .	97
7.3. Taux de croissance . . . . .	106
7.4. Une fonction monotone . . . . .	108
7.5. Appendice : systèmes coopératifs périodiques . . . . .	112
7.6. Appendice : théorème de Krein-Rutman . . . . .	113
<b>Chapitre 8. Une maladie à vecteurs avec de la saisonnalité</b>	<b>115</b>
8.1. Une épidémie de leishmaniose au Maroc . . . . .	115
8.2. Modèle . . . . .	117
8.3. Analyse . . . . .	118
8.4. Simulation et estimation de la reproductivité . . . . .	121
<b>Chapitre 9. Approximation de la reproductivité</b>	<b>127</b>
9.1. Une épidémie de chikungunya à La Réunion . . . . .	127
9.2. Rappel de la définition de la reproductivité . . . . .	131
9.3. Méthodes numériques pour calculer la reproductivité . . . . .	134
9.3.1. Discrétisation du problème intégral de valeur propre. . . . .	134
9.3.2. Séries de Fourier : le cas général périodique. . . . .	134
9.3.3. Séries de Fourier : le cas sinusoidal. . . . .	135
9.3.4. Application de la théorie de Floquet. . . . .	139
9.4. Maladies à vecteurs . . . . .	140
9.4.1. Paludisme. . . . .	140
9.4.2. Le chikungunya à La Réunion. . . . .	142
9.5. Autres applications . . . . .	146
9.6. Appendice . . . . .	147
<b>Chapitre 10. Modèles avec un facteur périodique simple</b>	<b>149</b>
10.1. Introduction . . . . .	149
10.2. Calculs . . . . .	152
10.3. Formules approchées . . . . .	153
10.4. Un modèle S-E-I-S avec une période de latence fixe . . . . .	155
10.5. Conclusion . . . . .	160
<b>Chapitre 11. Résonance du taux de croissance</b>	<b>161</b>
11.1. Introduction . . . . .	161
11.2. Théorie perturbative : formules du premier ordre . . . . .	164

11.2.1. Taux de croissance initial comme valeur propre. . . . .	164
11.2.2. Formules perturbatives du premier ordre pour le taux de croissance. . . . .	166
11.3. Formule du second ordre et résonance . . . . .	168
11.4. Exemples . . . . .	171
11.4.1. Modèle S-I-R périodique. . . . .	171
11.4.2. Modèle S-I-R périodique avec une période d'infection fixe. . . . .	172
11.4.3. Modèle S-E-I-R périodique. . . . .	174
11.4.4. Modèle S-E-I-R périodique avec une période de latence fixe. . . . .	175
11.4.5. Modèle S-E-I-R périodique avec une période de latence distribuée selon une loi Gamma. . . . .	177
11.5. Mille et un modèles périodiques . . . . .	179
11.6. Appendice : croissance exponentielle de la valeur reproductive totale dans un environnement périodique . . . . .	180
<b>Chapitre 12. Modèle de Kermack et McKendrick pour la peste à Bombay</b>	<b>181</b>
12.1. Un ajustement trompeur . . . . .	181
12.2. La peste bubonique à Bombay et les formules obtenues par Kermack et McKendrick . . . . .	183
12.3. Valeurs des paramètres . . . . .	184
12.4. Saisonnalité . . . . .	187
12.5. Reproductivité d'un type avec de la saisonnalité . . . . .	194
12.6. Dynamique lente-rapide et le modèle S-I-R . . . . .	197
12.7. Conclusion . . . . .	198
<b>Chapitre 13. Taille finale des épidémies avec de la saisonnalité</b>	<b>199</b>
13.1. Modèle S-I-R périodique . . . . .	199
13.2. Simulations numériques . . . . .	202
13.3. Théorèmes de seuil . . . . .	207
13.3.1. Système S-I-R périodique. . . . .	207
13.3.2. Système S-E-I-R périodique. . . . .	209
<b>Chapitre 14. Taille finale des épidémies dans un environnement périodique de faible amplitude</b>	<b>213</b>
14.1. Une épidémie de dengue à La Réunion . . . . .	213
14.2. Formule exacte pour le coefficient correcteur . . . . .	216
14.3. Formules approchées . . . . .	217
<b>Chapitre 15. Taille finale des épidémies dans un environnement périodique haute fréquence</b>	<b>221</b>
15.1. Introduction . . . . .	221
15.2. Quelques simulations . . . . .	222
15.3. Proximité des tailles finales . . . . .	225
<b>Chapitre 16. Modèles pour les maladies endémiques</b>	<b>229</b>
16.1. Persistance dans un modèle endémique . . . . .	229
16.2. Deux pathogènes en compétition . . . . .	232

16.3. Appendice : systèmes positifs . . . . .	233
---	-----

### III Modèles stochastiques à coefficients périodiques 235

#### Chapitre 17. Probabilité d'extinction dans un environnement périodique 237

17.1. Un seul type d'individus infectés . . . . .	237
17.2. Plusieurs types d'individus infectés . . . . .	241
17.3. Un modèle épidémique simple pour la rougeole en France . . . . .	249
17.4. Réintroduction d'espèces en biologie de la conservation . . . . .	255
17.5. Conclusion . . . . .	257
17.6. Appendice : systèmes coopératifs périodiques . . . . .	258

#### Chapitre 18. Probabilité d'extinction dans un environnement périodique lent 259

18.1. Un seul type d'individus infectés . . . . .	259
18.1.1. Calcul préliminaire. . . . .	261
18.1.2. Limite $T \rightarrow 0$ . . . . .	261
18.1.3. Limite $T \rightarrow +\infty$ . . . . .	262
18.1.4. Exemple. . . . .	264
18.1.5. Lien avec les « canards » . . . . .	266
18.2. Plusieurs types d'individus infectés . . . . .	267
18.2.1. Modèle. . . . .	268
18.2.2. Exemple. . . . .	271
18.2.3. Généralisation. . . . .	274
18.2.4. Conclusion. . . . .	275

#### Chapitre 19. Modèle S-I-S stochastique dans un environnement périodique 277

19.1. Modèle . . . . .	277
19.2. Calculs analytiques . . . . .	279
19.2.1. Équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi . . . . .	279
19.2.2. Orbite hétérocline. . . . .	285
19.3. Calculs numériques . . . . .	293
19.4. Remarques . . . . .	297
19.5. Appendice . . . . .	299

#### Bibliographie 301