

Table des matières

Introduction	1
Prérequis et notations	3
1. Calcul différentiel	3
2. Mesures et intégration	3
3. Analyse fonctionnelle	5
4. Topologie	6
Chapitre 1. Intégrale curviligne	7
1.1. Formes différentielles de degré 1	7
1.1.1. Formes différentielles sur un ouvert de \mathbb{R}^n	7
1.1.2. Notation différentielle et fonctions composées	8
1.1.3. Cas du plan complexe	10
1.1.4. Image réciproque d'une 1-forme par une application	12
1.2. Chemins, lacets et courbes	13
1.2.1. Chemins et lacets	13
1.2.2. Courbes de Jordan	15
1.2.3. Équivalence de chemins, équivalence de lacets	16
1.3. Intégrale curviligne	17
1.3.1. Intégrale d'une 1-forme sur une partie de \mathbb{R}	17
1.3.2. Intégrale sur un chemin de classe \mathcal{C}^1 par morceaux ; exemples	18
1.3.3. Propriétés de l'intégrale curviligne	19
1.3.4. Mesure $(dz)_\gamma$ associée à un chemin γ	21
1.4. Orientation	22
1.4.1. Orientation du plan	22
1.4.2. Orientation d'une courbe du plan	22
1.4.3. Notations	26
1.4.4. Intégrale sur une courbe orientée	26
1.5. Longueur	28
1.5.1. Longueur d'un chemin, longueur d'une courbe	28
1.5.2. Mesure de longueur sur une courbe	30

Chapitre 2. Formes différentielles dans le plan	37
2.1. Formes exactes et formes fermées	37
2.1.1. Formule de Stokes pour un rectangle	37
2.1.2. Définitions et exemples	38
2.1.3. Lemme de Poincaré	39
2.1.4. Caractérisation des formes exactes	41
2.1.5. Cohomologie de de Rham	42
2.2. Formes différentielles de degré 2	43
2.2.1. Applications bilinéaires alternées	43
2.2.2. Formes différentielles	44
2.2.3. Image réciproque d'une 2-forme par une application	45
2.2.4. Dérivée extérieure d'une 1-forme	46
2.2.5. Intégration	48
2.3. Formule de Stokes	48
2.3.1. Compacts à bords réguliers	48
2.3.2. Formule de Stokes	50
2.3.3. Démonstration élémentaire dans le cas d'un « disque à trous »	56
Chapitre 3. Fonctions holomorphes I	65
3.1. Définitions et exemples	65
3.1.1. Fonctions \mathbb{C} -dérivables	65
3.1.2. Fonctions holomorphes	68
3.1.3. Exemples fondamentaux	69
a. Séries entières	69
b. Transformée de Cauchy d'une mesure de Radon	70
3.2. Fonctions usuelles	72
3.2.1. Exponentielle	72
a. Exponentielle complexe	72
b. Remarques sur la définition	74
c. Exponentielle d'un élément d'une algèbre de Banach	76
3.2.2. Fonctions trigonométriques	76
3.2.3. Logarithmes et arguments	77
3.2.4. Racines k -ièmes, puissances	80
3.3. Théorème de Cauchy, formule de Cauchy	81
3.3.1. Théorème de Cauchy	81
3.3.2. Formule de Cauchy-Pompeiu	81
3.3.3. Formule de Cauchy et conséquences immédiates	83
3.4. Développement en série entière	86
3.4.1. Principe du prolongement analytique	87

3.5. Inégalités de Cauchy et applications	88
3.5.1. Inégalités de Cauchy	88
3.5.2. Suites de fonctions holomorphes	90
a. Théorème de convergence de Weierstrass	90
b. Théorème de Montel	91
c. Topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$	93
3.5.3. Intégrales à paramètres	94
3.6. Formule de Cauchy pour un disque : démonstration directe	95
3.7. Transformée de Cauchy d'une mesure borélienne	97
3.8. Noyau de Cauchy ; espaces $A(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$	99
3.8.1. Algèbre du disque $A(\mathbb{D})$ et noyau de Cauchy	99
3.8.2. Espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$	100
Chapitre 4. Fonctions holomorphes II	125
4.1. Primitives et logarithmes	125
4.2. Théorème de Morera	126
4.3. Théorème de Cauchy-Goursat	128
4.4. Zéros des fonctions holomorphes	131
4.4.1. Factorisation ; principe des zéros isolés	131
4.4.2. Formule de Jensen	133
4.4.3. Conséquences de la formule de Jensen	136
a. Intégrabilité du logarithme	136
b. Croissance et distribution des zéros	138
4.5. Séries de Laurent	140
4.6. Singularités isolées ; fonctions méromorphes	144
4.6.1. Singularités isolées	144
4.6.2. Fonctions méromorphes	147
4.6.3. Exemples : prolongements méromorphes de Γ et ζ	147
4.7. Théorème de Liouville	149
4.8. Principe du maximum	153
4.9. Lemme de Schwarz	156
4.10. Produits infinis	157
4.10.1. Exemples	159
a. Développement de $\sin \pi z$ en produit infini	159
b. Développement de $1/\zeta$	161
c. Développement de $1/\Gamma$	162
d. Formule des compléments	163
4.10.2. Produits de Blaschke ; zéros des fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$	164

Chapitre 5. Homotopie	181
5.1. Introduction	181
5.2. Intégrale curviligne : cas des chemins continus	182
5.2.1. Primitive d'une forme fermée le long d'un chemin	182
5.2.2. Intégrale sur un chemin continu	185
5.3. Homotopie	187
5.3.1. Définitions ; invariance de l'intégrale par homotopie	187
5.3.2. Ouverts simplement connexes	190
5.4. Indice d'un lacet par rapport à un point	191
5.4.1. Déterminations du logarithme le long d'un chemin ; variation de l'argument	191
5.4.2. Définition de l'indice ; exemples ; calcul pratique	193
5.4.3. Formule de Cauchy homotopique	195
5.4.4. Propriétés de l'indice	196
a. Invariance par homotopie	196
b. Dépendance par rapport au point p	197
5.4.5. Indice et logarithmes continus	198
Chapitre 6. Topologie du plan	209
6.1. Degré d'une application définie sur un cercle	209
6.2. Théorème de Brouwer et théorème de l'image ouverte	211
6.3. Homotopie, extensions et logarithmes continus	212
6.3.1. Autre définition de l'indice	214
6.3.2. L'ensemble des exponentielles dans une algèbre de Banach	214
6.4. Théorème de Jordan	215
6.4.1. Les groupes $\mathcal{G}(K)$, $\mathcal{E}(K)$ et $\mathbf{G}(K)$	216
6.4.2. Un exemple	216
6.4.3. Étude du groupe $\mathbf{G}(K)$ dans le cas général	217
6.4.4. Théorème de Jordan	220
6.5. Séparation de deux points du plan	221
Chapitre 7. Théorème de Cauchy homologique	231
7.1. Cycles, homologie	231
7.2. Théorème de Cauchy homologique	232
7.3. Remarques	235
7.3.1. Densité des fonctions rationnelles	235
7.3.2. Homologie et cohomologie	236

Chapitre 8. Résidus	239
8.1. Théorème des résidus	239
8.2. Calcul pratique d'un résidu	240
8.3. Dénombrement de zéros et de pôles; applications	241
8.3.1. Principe de l'argument, théorème de Rouché	241
8.3.2. Comportement local d'une fonction holomorphe	243
8.3.3. Suites de fonctions holomorphes	245
8.4. Exemples de calculs d'intégrales	246
8.4.1. Intégrales trigonométriques	246
8.4.2. Intégrale d'une fonction rationnelle sans pôles réels	246
8.4.3. Intégrales de Fourier	248
8.4.4. Formule des compléments; prolongement méromorphe de ζ à \mathbb{C}	249
Chapitre 9. Théorème de Runge et applications	265
9.1. Théorème de Runge	265
9.2. Enveloppe d'holomorphie	269
9.3. Résolution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$	274
9.4. Problème de Cousin et théorème de Mittag-Leffler	275
9.5. Théorème de Weierstrass	277
Chapitre 10. Représentation conforme	297
10.1. La sphère de Riemann	297
10.2. Fonctions holomorphes sur un ouvert de \mathbb{S}_2	298
10.2.1. Définition et exemples	298
10.2.2. Biholomorphismes	300
10.3. Exemples : automorphismes de \mathbb{C} , de \mathbb{S}_2 et de \mathbb{D}	301
10.3.1. Automorphismes de \mathbb{C}	301
10.3.2. Automorphismes de \mathbb{S}_2	302
a. Caractérisation	302
b. Homographies et cercles de \mathbb{S}_2	303
10.3.3. Automorphismes du disque unité	304
10.4. Le théorème de la représentation conforme	306
10.4.1. Réduction au cas d'un domaine borné	306
10.4.2. Une propriété d'extremum	307
10.4.3. Preuve du théorème de Riemann	308
10.4.4. Un exemple explicite	308
10.5. Caractérisations des ouverts simplement connexes	312
10.6. Domaines de Jordan; théorème de Carathéodory	313

Chapitre 11. Fonctions harmoniques	327
11.1. Définition et propriétés élémentaires	327
11.2. Harmonicité et holomorphicité	328
11.3. Analyticité; principe du prolongement analytique	330
11.4. Propriété de la moyenne; principe du maximum	332
11.5. Formule de Poisson	333
11.5.1. Noyau de Poisson	334
11.5.2. Formule de Poisson	335
11.6. Inégalités de Cauchy, inégalités de Harnack	338
11.6.1. Inégalités de Cauchy	338
11.6.2. Inégalités de Harnack	339
11.7. Intégrale de Poisson; problème de Dirichlet	342
11.7.1. Intégrale de Poisson	342
11.7.2. Problème de Dirichlet	344
11.7.3. Une application : harmonicité et propriété de la moyenne	345
11.8. Convergence des séries de Fourier au sens d'Abel-Poisson	347
11.8.1. Convergence en norme	348
11.8.2. Convergence préfaible	350
11.8.3. Convergence presque partout	350
11.9. Espaces h^p	353
11.10. Formule de Green et applications	359
11.10.1. Formule de Green	359
11.10.2. Une formule du type « Cauchy-Pompeiu »	362
11.10.3. Potentiel logarithmique	365
Chapitre 12. Fonctions sous-harmoniques	383
12.1. Définitions et propriétés élémentaires	383
12.1.1. Semi-continuité	383
12.1.2. Fonctions sous-harmoniques; exemples	386
12.1.3. Propriétés de stabilité	387
12.2. Principe du maximum	388
12.3. Propriété du majorant harmonique	390
12.4. Moyennes circulaires; théorème des trois cercles	391
12.5. Intégrabilité	393
12.6. Approximation par convolution	395
12.7. Fonctions sous-harmoniques et distributions	398
12.7.1. Distributions positives	398
12.7.2. Distributions sous-harmoniques	399
12.7.3. Lemme de Weyl; hypoellipticité	402
12.7.4. Théorème de décomposition de Riesz	403

12.7.5. Formule de Jensen	404
12.8. Exemples d'utilisation de la sous-harmonicité	405
12.8.1. Problème de Dirichlet	406
12.8.2. Opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$	410
12.8.3. Fonctions holomorphes de plusieurs variables	412
12.8.4. Algèbres de Banach	417
a. Théorème de Vesentini	417
b. Algèbres semi-simples	418
c. Homomorphismes d'algèbres de Banach	419
Annexe A. Convolution, partitions de l'unité	431
A.1. Convolution	431
A.1.1. Définition et exemples	431
A.1.2. Régularisation et approximation	433
A.2. Fonctions plateaux ; partitions de l'unité	434
Annexe B. Distributions	443
B.1. Définition et exemples	443
B.2. Opérations algébriques, restriction	445
B.3. Dérivation	445
B.4. Support d'une distribution	446
B.5. Convolution	447
Bibliographie	455
Commentaires bibliographiques succincts	459
Index	465
Index des notations	469