

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>I</b>
Bibliographie . . . . .	5
<b>Chapitre I. Points et droites dans le plan</b>	<b>7</b>
I.1. Dans quel cadre, dans quel plan travaillons-nous ? Et déjà une question toute simple de Sylvester sur les alignements de points . . . . .	7
I.2. Une autre question naïve de Sylvester sur les probabilités géométriques de quatre points . . . . .	13
I.3. L'essence de la géométrie affine et le théorème fondamental . . . . .	20
I.4. Trois configurations du plan affine et ce qu'il en est advenu : Pappus, De- sargues et Perles . . . . .	26
I.5. L'irrésistible nécessité de la géométrie projective et la construction du plan projectif . . . . .	32
I.6. Intermezzo : la droite projective et le birapport . . . . .	38
I.7. Retour au plan projectif : suite et fin . . . . .	41
I.8. Le cas complexe et mieux encore, Sylvester dans le cas complexe : la conjecture de Serre . . . . .	52
I.9. Trois configurations de l'espace (à trois dimensions) : Reye, Möbius et Schläfli . . . . .	55
I.10. Les arrangements d'hyperplans . . . . .	60
XYZ de I . . . . .	61
Bibliographie . . . . .	72
<b>Chapitre II. Cercles et sphères</b>	<b>75</b>
II.0. Introduction et la conjecture de Borsuk . . . . .	75
II.1. Un choix de configurations de cercles et un regard critique sur elles . . .	81
II.2. Une inversion toute seule et ce que l'on peut faire avec . . . . .	94
II.3. Comment composer plusieurs inversions ? Première solution : le groupe conforme du disque et la géométrie hyperbolique plane . . . . .	98
II.4. Deuxième solution : le groupe conforme de la sphère, vu algébriquement puis géométriquement avec les inversions en dimension 3 (et la géomé- trie hyperbolique de dimension 3). L'apparition historique des premiers fractals . . . . .	104
II.5. L'inversion dans l'espace : le sextuple et sa généralisation grâce à la sphère de dimension 3 . . . . .	110
II.6. Plus haut dans l'échelle : la géométrie globale des cercles et des sphères	116
II.7. Les empilements hexagonaux de cercles et la représentation conforme	123

II.8. La baderne d'Apollonius . . . . .	135
XYZ de II . . . . .	139
Bibliographie . . . . .	163
<b>Chapitre III. La sphère pour elle-même, comment bien y répartir des points ?</b>	<b>167</b>
III.1. La métrique de la sphère et la trigonométrie sphérique . . . . .	167
III.2. Le groupe de Möbius : applications . . . . .	174
III.3. Mission impossible : bien répartir des points sur la sphère $S^2$ , ozone, électrons, dictateurs ennemis, balles de golf, virologie, physique de la matière condensée . . . . .	176
III.4. Le kissing number de $S^2$ , alias le rude problème de la treizième sphère	201
III.5. Quatre problèmes ouverts pour la sphère $S^3$ . . . . .	204
III.6. Un problème de Banach-Ruziewicz : l'unicité de la mesure canonique	206
III.7. Une approche conceptuelle pour le kissing number en dimension quelconque . . . . .	207
XYZ de III . . . . .	209
Bibliographie . . . . .	210
<b>Chapitre IV. Coniques et quadriques</b>	<b>215</b>
IV.1. Motivations, une définition parachutée de l'échelle et pourquoi . . . . .	215
IV.2. Avant Descartes : les coniques réelles euclidiennes. Définition et quelques propriétés classiques . . . . .	218
IV.3. L'arrivée de Descartes et la naissance de la géométrie algébrique . . . . .	234
IV.4. Théorie projective réelle des coniques, dualité . . . . .	236
IV.5. La philosophie de Klein arrive tout naturellement . . . . .	243
IV.6. Jouer avec deux coniques, nécessité une fois de plus de la complexification	246
IV.7. Les coniques projectives complexes et l'espace de toutes les coniques . . . . .	251
IV.8. Le plus beau théorème sur les coniques : les polygones de Poncelet . . . . .	256
IV.9. Le théorème le plus difficile sur les coniques : les 3264 coniques de Chasles	269
IV.10. Les quadriques . . . . .	275
XYZ de IV . . . . .	288
Bibliographie . . . . .	291
<b>Chapitre V. Les courbes planes</b>	<b>295</b>
V.1. Les courbes planes et l'homme de la rue : le théorème de Jordan, l' <i>Umlaufsatz</i> et l'inégalité isopérimétrique . . . . .	295
V.2. Qu'est-ce qu'une courbe ? Courbes géométriques et courbes cinématiques	301
V.3. La classification des courbes géométriques et le degré des applications du cercle sur lui-même . . . . .	304
V.4. Le théorème de Jordan . . . . .	306
V.5. <i>Umlaufsatz</i> ( <i>turning tangent theorem</i> ) et convexité globale . . . . .	308
V.6. Invariants euclidiens : longueur (le théorème du boulevard périphérique) et courbure (scalaire et algébrique). Nombre d'enroulement . . . . .	311
V.7. La courbure algébrique est un invariant caractéristique : fabrication de règles, contrôle par la courbure . . . . .	318

V.8. Le théorème des quatre sommets et sa réciproque ; une application à la physique . . . . .	321
V.9. Généralisations du théorème des quatre sommets : Arnold I . . . . .	328
V.10. Vers une classification des courbes fermées : Whitney et Arnold II . . . . .	332
V.11. L'inégalité isopérimétrique : les essais de Steiner . . . . .	348
V.12. L'inégalité isopérimétrique : des démonstrations sur tous les barreaux . . . . .	352
V.13. Courbes algébriques planes : généralités . . . . .	359
V.14. Les cubiques, leur loi d'addition et les courbes elliptiques abstraites . . . . .	363
V.15. Courbes algébriques réelles, euclidiennes . . . . .	377
V.16. La géométrie d'ordre fini ( <i>Endliche Ordnung</i> ) . . . . .	388
XYZ de V . . . . .	392
Bibliographie . . . . .	397

## Chapitre VI. Les surfaces lisses

403

VI.1. De quels objets s'agit-il et pourquoi ? Classification des surfaces compactes . . . . .	403
VI.2. La métrique intrinsèque et le problème du plus court chemin . . . . .	408
VI.3. Les géodésiques, le cut-locus et les ellipsoïdes récalcitrants . . . . .	410
VI.4. Un concept abstrait indispensable : les surfaces riemanniennes . . . . .	421
VI.5. Problèmes d'isométries : surfaces abstraites versus surfaces de $\mathbb{E}^3$ . . . . .	426
VI.6. Forme locale des surfaces : la seconde forme fondamentale, courbure totale et courbure moyenne, leur interprétation géométrique, le <i>theorem egregium</i> , la fabrication de billes précises . . . . .	430
VI.7. Ce que l'on sait faire concernant la courbure totale (de Gauss) . . . . .	441
VI.8. Ce que l'on sait faire concernant la courbure moyenne, tout sur les bulles de savon et les billes de plomb . . . . .	449
VI.9. Ce que l'on ne sait pas faire (complètement) pour les surfaces . . . . .	456
VI.10. Les surfaces et le générique . . . . .	462
VI.11. L'inégalité isopérimétrique pour les surfaces . . . . .	469
XYZ de VI . . . . .	471
Bibliographie . . . . .	476

## Chapitre VII. La convexité et les convexes

481

Histoire et introduction . . . . .	481
VII.1. Fonctions convexes, exemples et premières applications . . . . .	484
VII.2. Fonctions convexes de plusieurs variables, un exemple important . . . . .	488
VII.3. Exemples de convexes . . . . .	490
VII.4. Trois opérations essentielles sur les convexes . . . . .	493
VII.4.A. Les symétrisations (de Steiner, de Schwarz). . . . .	494
VII.4.B. De l'algèbre avec les convexes : l'addition de Minkowski. . . . .	497
VII.4.C. Une dualité : la polarité. . . . .	499
VII.5. Volume et aire des convexes (compacts), volumes classiques. Peut-on calculer le volume en temps polynomial ? . . . . .	502
VII.5.A. Volume des cubes, des cocubes, des simplexes. . . . .	504
VII.5.B. Boules, sphères et ellipsoïdes. . . . .	504
VII.5.C. Approximation par des polytopes et aires des convexes. . . . .	508

VII.5.D. Mission impossible : calculer numériquement le volume d'un convexe. . . . .	510
VII.6. Volume, aire, diamètre et symétrisations : première démonstration de l'inégalité isopérimétrique et autres applications . . . . .	512
VII.7. Volume et addition de Minkowski : théorème de Brunn-Minkowski et deuxième démonstration de l'inégalité isopérimétrique . . . . .	515
VII.8. Volume et polarité . . . . .	520
VII.9. L'allure des convexes, leur degré de méchanceté . . . . .	523
VII.9.A. Comment engendrer un convexe. . . . .	523
VII.9.B. Topologie des convexes et de leur frontière. . . . .	524
VII.9.C. L'ellipsoïde de John-Loewner et applications. . . . .	525
VII.9.D. Un premier espace métrique formé avec tous les CS-convexes : le compact de Banach-Mazur. . . . .	529
VII.9.E. La conjecture de Rogalski et une application de type isopérimétrique. . . . .	532
VII.9.F. Tester la méchanceté d'un convexe avec ses moments d'inertie : les ellipsoïdes de Legendre et de Binet (ellipsoïde d'inertie), l'invariant d'inertie et la grande conjecture sur les convexes (première formulation). . . . .	534
VII.10. Volume des tranches dans les convexes . . . . .	538
VII.10.A. Couper par des droites, le problème des rayons X de Hammer. . . . .	538
VII.10.B. Couper par des hyperplans : questions générales, la grande conjecture. . . . .	540
VII.10.C. Les sections hyperplanes du cube. . . . .	544
VII.11. Sections de basse dimension : le phénomène de concentration et le théorème de Dvoretzky sur l'existence de sections presque sphériques . . . . .	550
VII.11.A. Énoncé du résultat. . . . .	550
VII.11.B. Le phénomène de concentration de Paul Lévy. . . . .	553
VII.11.C. La démonstration. . . . .	556
VII.12. Miscellanées . . . . .	557
VII.12.A. Projections. . . . .	557
VII.12.B. Formule de Steiner-Minkowski et volumes mixtes. . . . .	559
VII.12.C. Convexes et physique mathématique : le corps flottant qui perd la tête, la fréquence fondamentale, le mouvement à la Poinsot, la gravité newtonienne, le destin des <i>rolling stones</i> . . . . .	561
VII.12.D. L'allure de la frontière d'un convexe, l'espace de tous les convexes. . . . .	572
VII.12.E. Immobilisation d'un convexe. . . . .	576
VII.13. Intermezzo : peut-on en finir avec l'inégalité isopérimétrique ? . . . .	576
Bibliographie . . . . .	584
<b>Chapitre VIII. Polygones, polyèdres, polytopes</b> . . . . .	<b>591</b>
VIII.1. Introduction . . . . .	591
VIII.2. Notions de base . . . . .	592
VIII.3. Polygones . . . . .	594
VIII.4. Polyèdres : combinatoire . . . . .	600

VIII.5. Polyèdres euclidiens réguliers . . . . .	606
VIII.6. Polyèdres euclidiens : rigidité de Cauchy (unicité) et existence d'Alexandrov . . . . .	613
VIII.7. Isopérimétrie chez les polyèdres euclidiens . . . . .	619
VIII.8. Propriétés d'inscriptibilité chez les polyèdres euclidiens ; comment mettre une sphère (un œuf) en cage et rapport avec les empilements de cercles . . . . .	621
VIII.9. Polyèdres : rationalité . . . . .	628
VIII.10. Polytopes ( $d \geq 4$ ) : combinatoire I . . . . .	630
VIII.11. Polytopes réguliers ( $d \geq 4$ ) . . . . .	636
VIII.12. Polytopes ( $d \geq 4$ ) : rationalité, combinatoire II . . . . .	644
VIII.13. Brèves allusions à des sujets non vraiment abordés . . . . .	647
Bibliographie . . . . .	652

## **Chapitre IX. Réseaux, empilements et pavages dans le plan** **655**

IX.1. Réseaux, une droite dans le réseau standard $\mathbb{Z}^2$ et la théorie des fractions continues, une immensité d'applications . . . . .	655
IX.2. Trois façons de compter les points de $\mathbb{Z}^2$ dans des domaines variés : formules de Pick et d'Ehrhart, problème du cercle . . . . .	660
IX.3. Points de $\mathbb{Z}^2$ et d'autres réseaux dans certains convexes : le théorème de Minkowski et la théorie géométrique des nombres . . . . .	667
IX.4. Les réseaux du plan euclidien : classification, peut-on y trouver des polygones réguliers ? Densité, analyse de Fourier sur les réseaux, spectre et dualité . . . . .	671
IX.5. Empiler des cercles (des disques) de même rayon dans le plan, en nombre fini ou infini (notion de densité). Autres critères . . . . .	682
IX.6. Empaqueter des carrés, des boîtes de conserve (plates), le problème du grillage (ou des nids d'abeilles) . . . . .	692
IX.7. Paver le plan avec un groupe (cristallographie). Valences, tremblements de terre . . . . .	694
IX.8. Pavages en dimensions supérieures . . . . .	702
IX.9. Algorithmique et pavages du plan : pavages aperiodiques et décidabilité, classification des pavages de Penrose . . . . .	706
IX.10. Pavages hyperboliques et surfaces de Riemann . . . . .	719
Bibliographie . . . . .	722

## **Chapitre X. Réseaux et empilements en dimensions supérieures** **727**

X.1. Les réseaux et empilements associés de la dimension 3 . . . . .	727
X.2. Empiler des boules au mieux en dimension 3, la conjecture de Kepler enfin résolue . . . . .	733
X.3. Un peu d'épistémologie risquée : le problème des quatre couleurs et la conjecture de Kepler . . . . .	747
X.4. Réseaux en dimension quelconque : d'abord des exemples . . . . .	749
X.5. Réseaux en dimension quelconque : densité, laminations . . . . .	757
X.6. Empilements en dimension quelconque : des options variées pour l'optimalité . . . . .	765

X.7. Codes correcteurs d'erreur . . . . .	770
X.8. Dualité, fonctions thêta, spectres et isospectralité dans les réseaux . . . . .	779
Bibliographie . . . . .	786

## **Chapitre XI. Géométrie et dynamique I : les billards** **789**

XI.1. Introduction et motivation : description du mouvement de deux particules de même masse à l'intérieur d'un intervalle . . . . .	789
XI.2.A. La dichotomie et les fractions continues. . . . .	794
XI.2. Jouer au billard dans un carré . . . . .	794
XI.2.B. Compter les trajectoires périodiques. . . . .	800
XI.2.C. Introduction du langage des systèmes dynamiques. . . . .	804
XI.3. Particules de masses différentes : polygones rationnels et irrationnels . . . . .	805
XI.4. Résultats dans le cas des polygones rationnels : premier barreau . . . . .	809
XI.5. Résultats dans le cas rationnel : plusieurs barreaux très hauts . . . . .	814
XI.5.A. Nature des trajectoires non périodiques. . . . .	815
XI.5.B. Comptage des trajectoires périodiques. . . . .	823
XI.6. Résultats dans le cas des polygones irrationnels . . . . .	824
XI.7. Retour au cas de deux masses : résumé . . . . .	830
XI.8. Billards concaves, billards hyperboliques . . . . .	830
XI.9. Cercles et ellipses . . . . .	834
XI.10. Billards convexes généraux . . . . .	839
XI.10.A. Les billards très lisses et strictement convexes : caustiques. . . . .	839
XI.10.B. Trois phénomènes étranges. . . . .	841
XI.10.C. Les billards génériques. . . . .	847
XI.10.D. Les trajectoires périodiques. . . . .	847
XI.10.E. Billards et dualités. . . . .	850
XI.11. Billards en dimensions supérieures . . . . .	852
XYZ de XI. Concepts et langage des systèmes dynamiques . . . . .	854
XI.XYZ.A. Ergodicité et mélange. . . . .	854
XI.XYZ.B. Les diverses notions d'entropie. . . . .	857
Bibliographie . . . . .	859

## **Chapitre XII. Géométrie et dynamique II : le flot géodésique sur une surface** **863**

Introduction . . . . .	863
XII.1. Le flot géodésique sur une surface : des questions . . . . .	865
XII.2. Des exemples pour sentir la difficulté du problème . . . . .	868
XII.2.A. Les sphères. . . . .	868
XII.2.B. Les surfaces de révolution : les surfaces de Zoll. . . . .	869
XII.2.C. Le contre-exemple de Weinstein. . . . .	872
XII.2.D. Les ellipsoïdes à trois axes. . . . .	874
XII.2.E. Les tores plats. . . . .	876
XII.3. Existence d'une trajectoire périodique . . . . .	878
XII.3.A. Le tore et les surfaces de genre supérieur. . . . .	878
XII.3.B. La sphère, le résultat de Birkhoff. . . . .	879
XII.4. Existence de plus d'une, de beaucoup de trajectoires périodiques ; et sait-on alors les compter ? . . . . .	886

XII.4.A. Le cas du tore. . . . .	887
XII.4.B. Les surfaces de genre supérieur. . . . .	889
XII.4.C. La sphère : les trois géodésiques de Lusternik-Schnirelman. . . . .	894
XII.4.D. La sphère : une infinité de géodésiques périodiques. . . . .	899
XII.5. Quel comportement espérer des autres trajectoires ? Ergodicité, entropies . . . . .	904
XII.5.A. Les surfaces de genre supérieur. . . . .	904
XII.5.B. Les entropies. . . . .	907
XII.5.C. Le cas de la sphère. L'exemple d'Osserman-Donnay. . . . .	909
XII.5.D. Entropie et longueur des géodésiques joignant deux points donnés. . . . .	912
XII.6. La mécanique détermine-t-elle la métrique ? . . . . .	914
XII.7. Récapitulation des questions ouvertes . . . . .	916
XII.8. Les dimensions supérieures . . . . .	916
Bibliographie . . . . .	917
<b>Abréviations des noms de revues</b>	<b>921</b>
<b>Crédit des illustrations</b>	<b>925</b>
<b>Index des noms</b>	<b>929</b>
<b>Index thématique</b>	<b>935</b>
<b>Index des notations</b>	<b>969</b>