

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>v</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>vii</b>
<b>Notations</b>	<b>xi</b>
<b>Linz, 1976</b>	<b>1</b>
1. Géométrie et inégalités . . . . .	1
2. Polynôme scindé à racines simples . . . . .	2
3. Un maximum de cubes dans un pavé . . . . .	3
4. Produit maximal d'entiers de somme constante . . . . .	4
5. Calcul matriciel et combinatoire . . . . .	5
6. Partie entière d'une suite . . . . .	6
<b>Belgrade, 1977</b>	<b>9</b>
1. Une construction du dodécagone régulier . . . . .	9
2. Suite finie de réels de longueur maximale . . . . .	10
3. Non-factorialité de $n\mathbb{N}^* + 1$ pour $n > 2$ . . . . .	12
4. Trigonométrie . . . . .	14
5. Autour de la division euclidienne . . . . .	15
6. Équation fonctionnelle sur $\mathbb{N}$ . . . . .	16
<b>Bucarest, 1978</b>	<b>19</b>
1. Période d'une suite de puissances dans $\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}$ . . . . .	19
2. Géométrie dans l'espace . . . . .	20
3. Suites partitionnant $\mathbb{N}^*$ . . . . .	21
4. Géométrie du triangle . . . . .	24
5. Une inégalité . . . . .	25
6. Problème de type Ramsey . . . . .	26

<b>Londres, 1979</b>	<b>29</b>
1. Manipulation de sommes . . . . .	29
2. Graphe bicolore sans triangle monochromatique . . . . .	30
3. Point fixe équidistant de deux objets en rotation . . . . .	32
4. Géométrie du bon, de la brute et du truand . . . . .	34
5. Manipulation de sommes . . . . .	37
6. Combinatoire et suites . . . . .	39
<b>Washington, D.C., 1981</b>	<b>41</b>
1. Géométrie et inégalités . . . . .	41
2. Diversité des méthodes en combinatoire . . . . .	42
3. Équation diophantienne $n^2 - mn - m^2 = \pm 1$ . . . . .	45
4. Arithmétique . . . . .	46
5. Géométrie pure . . . . .	47
6. Équation fonctionnelle à deux variables . . . . .	48
<b>Budapest, 1982</b>	<b>51</b>
1. Équation fonctionnelle avec conditions aux limites . . . . .	51
2. Géométrie du triangle . . . . .	53
3. Série définie à partir d'une suite décroissante minorée . . . . .	55
4. Équation diophantienne $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ . . . . .	56
5. Points alignés dans un hexagone . . . . .	57
6. Topologie . . . . .	58
<b>Paris, 1983</b>	<b>61</b>
1. Équation fonctionnelle . . . . .	61
2. Géométrie : une égalité d'angles . . . . .	62
3. Structure de $a\mathbb{N} + b\mathbb{N}$ . . . . .	63
4. Combinatoire sur un triangle équilatéral . . . . .	65
5. Ensemble d'entiers naturels sans progression arithmétique . . . . .	67
6. Une inégalité sur les côtés d'un triangle . . . . .	68
<b>Prague, 1984</b>	<b>73</b>
1. Une inégalité entre polynômes symétriques . . . . .	73
2. Trouver une solution explicite d'un problème arithmétique . . . . .	74
3. Une courbe polaire sur une partition du plan . . . . .	75
4. Géométrie . . . . .	76
5. Longueur moyenne des diagonales dans un polygone convexe . . . . .	77
6. Arithmétique . . . . .	80

<b>Joutsa, 1985</b>	<b>81</b>
1. Une condition de cocyclicité . . . . .	81
2. Arithmétique . . . . .	82
3. Nombre de coefficients impairs d'un polynôme . . . . .	83
4. Théorie additive des nombres . . . . .	86
5. Autour du quadrilatère complet . . . . .	88
6. De la complétude de $\mathbb{R}$ . . . . .	92
<b>Varsovie, 1986</b>	<b>95</b>
1. Système diophantien sans solution . . . . .	95
2. Géométrie des déplacements . . . . .	96
3. À la recherche de l'« entropie » . . . . .	98
4. Lieu géométrique défini par glissement . . . . .	99
5. Équation fonctionnelle . . . . .	100
6. Colorier des points du plan de façon « équilibrée » . . . . .	101
<b>La Havane, 1987</b>	<b>105</b>
1. Calculs de dérangements . . . . .	105
2. Géométrie . . . . .	108
3. Distance minimale sur un réseau . . . . .	110
4. Équation fonctionnelle sur $\mathbb{N}$ . . . . .	111
5. Distances irrationnelles et aires rationnelles . . . . .	112
6. Arithmétique des formes quadratiques . . . . .	116
<b>Canberra, 1988</b>	<b>119</b>
1. Géométrie : calcul d'une valeur et recherche d'un lieu . . . . .	119
2. Des graphes masqués par un énoncé obscur . . . . .	120
3. Points fixes d'une fonction définie récursivement . . . . .	122
4. Polynômes et fractions rationnelles . . . . .	123
5. Géométrie : une inégalité d'aires . . . . .	124
6. Magnifique arithmétique . . . . .	126
<b>Brunswick, 1989</b>	<b>129</b>
1. Partition d'un ensemble . . . . .	129
2. Géométrie du triangle . . . . .	130
3. Un résultat combinatoire en géométrie euclidienne . . . . .	133
4. Géométrie : une inégalité . . . . .	135
5. Entiers consécutifs ne contenant pas la puissance d'un nombre premier . . . . .	136
6. Dénombrement de permutations . . . . .	141

<b>Pékin, 1990</b>	<b>145</b>
1. Géométrie . . . . .	145
2. Les « bonnes » colorations . . . . .	146
3. Entiers $n$ tels que $n^2$ divise $2^n + 1$ . . . . .	148
4. Un peu d'imagination . . . . .	150
5. Arithmétique et théorie des jeux . . . . .	151
6. Géométrie, combinatoire et arithmétique! . . . . .	154
<b>Sigtuna, 1991</b>	<b>157</b>
1. Une inégalité géométrique . . . . .	157
2. Entiers $n$ tels que les nombres premiers avec $n$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ soient en progression arithmétique . . . . .	160
3. Combinatoire et arithmétique . . . . .	161
4. Théorie des graphes et théorie des nombres . . . . .	162
5. Autour des points de Brocard . . . . .	163
6. Un peu d'imagination . . . . .	168
<b>Moscou, 1992</b>	<b>173</b>
1. Une énumération de cas en arithmétique . . . . .	173
2. Une équation fonctionnelle . . . . .	174
3. Combinatoire : un problème de type Ramsey . . . . .	175
4. Triangles ayant le cercle inscrit et le milieu d'un côté donnés . . . . .	177
5. Cardinal d'un ensemble de points de l'espace en fonction des car- dinaux de ses projetés sur des plans . . . . .	178
6. Sommes de carrés d'entiers . . . . .	180
<b>Istanbul, 1993</b>	<b>183</b>
1. Un polynôme irréductible . . . . .	183
2. Autour du « Pedal Triangle Trick » . . . . .	185
3. Une variante du jeu de dames . . . . .	187
4. Une inégalité géométrique . . . . .	188
5. Équation fonctionnelle sur $\mathbb{N}^*$ . . . . .	191
6. Propagation d'un « signal lumineux » . . . . .	193
<b>Hong-Kong, 1994</b>	<b>199</b>
1. Minoration de la moyenne des éléments d'un ensemble . . . . .	199
2. Géométrie pure . . . . .	200
3. Nombre de chiffres non nuls en base deux . . . . .	201
4. Une équation diophantienne . . . . .	202
5. Équation fonctionnelle sur $]1, +\infty[$ . . . . .	203

6. Surtout ne pas prendre peur . . . . .	204
<b>Toronto, 1995</b>	<b>207</b>
1. Trois droites concourantes . . . . .	207
2. Une inégalité sous contrainte multiplicative . . . . .	208
3. Logique et géométrie . . . . .	209
4. Arithmétique et suites . . . . .	212
5. Un problème de chemin minimal . . . . .	213
6. Très belle combinatoire . . . . .	216
<b>Bombay, 1996</b>	<b>221</b>
1. Un exercice aux méthodes brutales et/ou subtiles . . . . .	221
2. Trois droites concourantes . . . . .	223
3. Équation fonctionnelle sur $\mathbb{N}$ . . . . .	225
4. Arithmétique . . . . .	226
5. Très difficile géométrie . . . . .	227
6. Subtile combinatoire . . . . .	228
<b>Mar del Plata, 1997</b>	<b>231</b>
1. Aire blanche et aire noire d'un triangle sur un échiquier . . . . .	231
2. Géométrie pure . . . . .	233
3. Combinatoire . . . . .	235
4. Les « matrices d'argent » . . . . .	236
5. L'équation diophantienne $a^{(b^2)} = b^a$ . . . . .	237
6. Partitions d'entiers en puissances de deux . . . . .	239
<b>Taïpei, 1998</b>	<b>245</b>
1. Une condition de cocyclicité . . . . .	245
2. La majoration de Plotkin . . . . .	246
3. Autour du nombre de diviseurs d'un entier et de son carré . . . . .	247
4. Une équation diophantienne . . . . .	248
5. Comment démontrer qu'un angle est aigu? . . . . .	249
6. Équation fonctionnelle sur $\mathbb{N}^*$ . . . . .	250
<b>Bucarest, 1999</b>	<b>253</b>
1. Ensemble fini de points stable par toute réflexion permutant deux de ses éléments . . . . .	253
2. Optimiser une inégalité . . . . .	254
3. Marquer des cases d'un échiquier pour que chaque case ait un voisin marqué . . . . .	256

4. Notion d'ordre dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . . . . .	258
5. Géométrie pure . . . . .	259
6. Équation fonctionnelle . . . . .	261
<b>Taejon, 2000</b>	<b>263</b>
1. Géométrie pure . . . . .	263
2. Une inégalité sous contrainte multiplicative . . . . .	264
3. Le jeu de saute-mouton . . . . .	266
4. Mathématicien et magicien . . . . .	269
5. Arithmétique . . . . .	270
6. Très difficile géométrie . . . . .	271
<b>Washington, D.C., 2001</b>	<b>275</b>
1. Géométrie : une inégalité angulaire . . . . .	275
2. Une inégalité . . . . .	276
3. Bien manier le principe des tiroirs... . . . .	278
4. Arithmétique et combinatoire . . . . .	279
5. Étonnante géométrie . . . . .	280
6. Montrer qu'un nombre est composé... sans le décomposer! . . . . .	282
<b>Glasgow, 2002</b>	<b>285</b>
1. Combinatoire : diversité des méthodes . . . . .	285
2. Géométrie pure . . . . .	287
3. Arithmétique... pas si sûr . . . . .	288
4. Arithmétique . . . . .	289
5. Équation fonctionnelle . . . . .	290
6. Géométrie et combinatoire . . . . .	292
<b>Tokyo, 2003</b>	<b>295</b>
1. Combinatoire . . . . .	295
2. Une équation diophantienne . . . . .	296
3. Géométrie repoussante . . . . .	297
4. Savoir manier la loi des sinus... . . . .	299
5. Une inégalité difficile . . . . .	301
6. Arithmétique très difficile . . . . .	303

<b>Athènes, 2004</b>	<b>305</b>
1. Géométrie . . . . .	305
2. Équation fonctionnelle pour des polynômes . . . . .	307
3. Paver un rectangle avec des « crochets » . . . . .	308
4. Une condition suffisante pour être les côtés d'un triangle . . .	311
5. Difficile géométrie . . . . .	312
6. Les « nombres alternés » . . . . .	314
<b>Merida, 2005</b>	<b>317</b>
1. Géométrie . . . . .	317
2. Suites d'entiers dont le $n$ premiers éléments sont un système com- plet de résidus modulo $n$ . . . . .	318
3. Une inégalité . . . . .	319
4. Arithmétique . . . . .	321
5. Géométrie : autour des cercles de Miquel . . . . .	322
6. Combinatoire : des résultats idylliques aux olympiades . . . .	323