

Table des matières

Préface	1
Chapitre 1. Introduction	7
1. La notion d'équation différentielle	7
2. Définitions et formulation intégrale	11
3. Solutions maximales, solutions globales	14
4. Lemme de Gronwall	17
5. L'ordre n se ramène à l'ordre 1	20
Exercices	22
Chapitre 2. Théorie linéaire	25
1. Rappels de topologie sur les espaces de matrices	26
2. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire	29
2.1. Unicité par le lemme de Gronwall.	30
2.2. Existence par une technique de point fixe.	30
2.3. Cas de l'ordre n scalaire.	33
3. Structure de l'ensemble des solutions	34
4. Matrice fondamentale et wronskien	39
5. Calcul pratique de l'exponentielle d'une matrice	48
6. Méthode de variation de la constante	54
7. Équations différentielles linéaires d'ordre n scalaires à coefficients constants	57
7.1. Cas homogène.	58
7.2. Cas avec second membre.	64
Exercices	72
Chapitre 3. Théorie non linéaire	83
1. Les théorèmes d'existence	84
2. Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas globalement lipschitzien	87
2.1. Le lemme 3.12 par une technique de point fixe.	87
2.2. Le lemme 3.12 par une norme avec poids.	89
2.3. Le lemme 3.12 par approximation uniforme.	90
2.4. Conséquences.	93
3. Cylindre de sécurité et résultat local	94
4. Prolongements de solutions et fin de la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz	96
5. Cas de l'ordre 2	99
6. Théorème de Cauchy-Peano-Arzelà local	100
6.1. Démonstration du théorème 3.26 par régularisation.	101
6.2. Démonstration du théorème 3.26 par utilisation d'un schéma numérique (méthode d'Euler).	103

6.3. Démonstration du théorème 3.26 au moyen d'un théorème de point fixe.	107
7. Prolongements des solutions et démonstration du théorème de Cauchy-Peano-Arzelà	108
8. Théorème des bouts	109
9. Dépendance par rapport à des paramètres	113
Exercices	122
Chapitre 4. Résolutions explicites	127
1. Raccordement de solutions	128
2. Quelques équations historiques	130
2.1. Équations différentielles à variables séparables.	130
2.2. Équations différentielles homogènes.	133
2.3. Équation différentielle d'Euler.	135
2.4. Équation différentielle de Bernoulli.	138
2.5. Équation différentielle de Riccati.	139
2.6. Équations différentielles de Lagrange et de Clairaut.	140
3. Technique d'abaissement de l'ordre	144
4. Qu'appelle-t-on « résolution explicite » ?	145
5. Rappels sur les séries entières	146
6. Développements en séries entières	149
6.1. Théorie de Fuchs.	152
6.2. Développement en série entière en un point ordinaire.	153
6.3. Méthode de Frobenius pour un point singulier régulier.	156
6.4. Équations de Legendre et de Bessel.	165
Exercices	177
Chapitre 5. Étude qualitative	183
1. Champs de vecteurs, isoclines et points stationnaires	185
2. Équations autonomes	189
2.1. Orbites d'une équation autonome.	189
2.2. Périodicité et point limite.	191
2.3. Intégrale première.	193
2.4. Systèmes hamiltoniens.	194
3. Dynamique des populations	199
3.1. Équation logistique.	199
3.2. Système de Lotka-Volterra.	203
4. Systèmes linéaires de deux équations différentielles scalaires à coefficients constants	209
5. Zones invariantes	218
5.1. Obtention de bornes par l'étude de variations.	219
5.2. Entonnoirs et anti-entonnoirs.	222
Exercices	232

Chapitre 6. Stabilité des solutions d'équations différentielles	239
1. Stabilité, définitions	240
2. Stabilité, à partir des équations différentielles linéaires homogènes	242
2.1. Cas linéaire homogène.	243
2.2. Cas semi-linéaire.	250
2.3. Linéarisation des systèmes autonomes.	253
3. Stabilité, avec les fonctions de Liapounov	255
3.1. La notion de fonction de Liapounov.	255
3.2. Les résultats de stabilité via Liapounov.	258
4. Bifurcations	264
Exercices	265
Chapitre 7. Hyperbolicité	269
1. Théorème de redressement pour les points réguliers	269
2. Théorème de Hartman-Grobman pour les points hyperboliques	272
3. Application aux portraits de phase	276
4. Variétés stable et instable	279
Exercices	282
Chapitre 8. Localisation des zéros de solutions d'équations différentielles	283
1. Zéros simples	283
2. Théorie de Sturm	285
Exercices	290
Chapitre 9. Théorie de Floquet	293
1. Équation de Hill	295
2. Surjectivité de l'exponentielle de matrice	299
3. Théorème de Floquet	304
4. Application à la stabilité	311
Exercices	315
Chapitre 10. Étude numérique	317
1. Approximation numérique	317
2. Méthode d'Euler explicite	318
3. Méthodes numériques à un pas	322
4. Critères de convergence pour les méthodes numériques	326
5. Méthode d'Euler implicite	336
6. Méthodes de Runge-Kutta	341
7. Choix de la méthode numérique	348
Exercices	348
Chapitre 11. Problèmes aux limites	351
1. Équation de Sturm-Liouville et fonction de Green	353
2. Aspect numérique	363
2.1. Description de la méthode numérique.	363
2.2. Convergence de la méthode.	365

3. Méthodes hilbertiennes	369
3.1. Espaces hilbertiens.	369
3.2. Espaces de Sobolev.	370
3.3. Avec utilisation du théorème de Riesz.	379
3.4. Avec utilisation du théorème de Lax-Milgram.	384
Exercices	386

Chapitre 12. Équations issues de la physique 389

1. Astronomie	389
1.1. Champs de vecteurs centraux.	390
1.2. Passage du problème à deux corps au problème à un corps.	394
1.3. Démonstration des lois de Kepler.	396
1.4. Le mouvement de la planète sur sa trajectoire.	399
2. Pendule	401
2.1. L'équation différentielle du pendule sans frottement.	401
2.2. Cas $ v_0 > 2$	404
2.3. Cas $ v_0 = 2$	405
2.4. Cas $0 < v_0 < 2$	407
2.5. Pendule avec frottement.	409
3. Équation de Newton	411
4. Équation de Van der Pol	415
5. EDP linéaire d'ordre 1 et méthode des caractéristiques	427
5.1. Description de la méthode.	428
5.2. Flot.	430
5.3. Résultats.	432
5.4. Exemples.	435
5.5. Caractéristiques en dimension N	437
6. Équation de la chaleur et méthode de Fourier	439
6.1. Équation de la chaleur et séries de Fourier.	439
6.2. Équation de la chaleur et transformée de Fourier.	448
Exercices	451

Annexe A. Solutions des exercices 459

1. Solutions des exercices du chapitre 1	459
2. Solutions des exercices du chapitre 2	464
3. Solutions des exercices du chapitre 3	527
4. Solutions des exercices du chapitre 4	543
5. Solutions des exercices du chapitre 5	570
6. Solutions des exercices du chapitre 6	594
7. Solutions des exercices du chapitre 7	600
8. Solutions des exercices du chapitre 8	607
9. Solutions des exercices du chapitre 9	611
10. Solutions des exercices du chapitre 10	616
11. Solutions des exercices du chapitre 11	638
12. Solutions des exercices du chapitre 12	652

Annexe B. Algèbre	669
1. Indépendance et bases	669
2. Matrices	669
3. Diagonalisation et réduction de Jordan	670
Annexe C. Géométrie	673
1. Produit vectoriel	673
2. Coniques	673
Annexe D. Analyse	675
1. Fonctions	675
1.1. Autour de la continuité.	675
1.2. Autour de la dérivabilité.	677
1.3. Convergence de suites de fonctions.	677
1.4. Séries de fonctions.	678
1.5. Régularisation.	679
2. Topologie	681
2.1. Topologie dans les espaces métriques et les espaces vectoriels normés.	681
2.2. Espaces complets.	683
2.3. Espaces compacts.	683
2.4. Espaces connexes.	684
2.5. Théorèmes de points fixes.	684
3. Intégration	687
3.1. Intersion.	687
3.2. Comparaison et équivalence.	688
3.3. Continuité et dérivabilité d'une intégrale à paramètre.	689
4. Fonctions analytiques réelles	690
5. Séries et Transformées	693
5.1. Séries de Fourier.	693
5.2. Transformée de Fourier.	696
5.3. Transformée de Laplace.	697
6. Calcul différentiel	698
6.1. Différentiabilité.	698
6.2. Formules de Taylor et extremum.	700
6.3. Relèvement, inversion et fonctions implicites.	701
Bibliographie	703
Index	705