

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1. Introduction</b>	<b>7</b>
1. La notion d'équation différentielle . . . . .	7
2. Définitions et formulation intégrale . . . . .	11
3. Solutions maximales, solutions globales . . . . .	14
4. Lemme de Gronwall . . . . .	17
5. L'ordre $n$ se ramène à l'ordre 1 . . . . .	20
Exercices . . . . .	22
<b>Chapitre 2. Théorie linéaire</b>	<b>25</b>
1. Rappels de topologie sur les espaces de matrices . . . . .	26
2. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire . . . . .	29
2.1. Unicité par le lemme de Gronwall. . . . .	30
2.2. Existence par une technique de point fixe. . . . .	30
2.3. Cas de l'ordre $n$ scalaire. . . . .	33
3. Structure de l'ensemble des solutions . . . . .	34
4. Matrice fondamentale et wronskien . . . . .	39
5. Calcul pratique de l'exponentielle d'une matrice . . . . .	48
6. Méthode de variation de la constante . . . . .	54
7. Équations différentielles linéaires d'ordre $n$ scalaires à coefficients constants . . . . .	57
7.1. Cas homogène. . . . .	58
7.2. Cas avec second membre. . . . .	64
Exercices . . . . .	72
<b>Chapitre 3. Théorie non linéaire</b>	<b>83</b>
1. Les théorèmes d'existence . . . . .	84
2. Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas globalement lipschitzien . . . . .	87
2.1. Le lemme 3.12 par une technique de point fixe. . . . .	87
2.2. Le lemme 3.12 par une norme avec poids. . . . .	89
2.3. Le lemme 3.12 par approximation uniforme. . . . .	90
2.4. Conséquences. . . . .	93
3. Cylindre de sécurité et résultat local . . . . .	94
4. Prolongements de solutions et fin de la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	96
5. Cas de l'ordre 2 . . . . .	99
6. Théorème de Cauchy-Peano-Arzelà local . . . . .	100
6.1. Démonstration du théorème 3.26 par régularisation. . . . .	101
6.2. Démonstration du théorème 3.26 par utilisation d'un schéma numérique (méthode d'Euler). . . . .	103

6.3. Démonstration du théorème 3.26 au moyen d'un théorème de point fixe.	107
7. Prolongements des solutions et démonstration du théorème de Cauchy-Peano-Arzelà . . . . .	108
8. Théorème des bouts . . . . .	109
9. Dépendance par rapport à des paramètres . . . . .	113
Exercices . . . . .	122
<b>Chapitre 4. Résolutions explicites</b>	<b>127</b>
1. Raccordement de solutions . . . . .	128
2. Quelques équations historiques . . . . .	130
2.1. Équations différentielles à variables séparables. . . . .	130
2.2. Équations différentielles homogènes. . . . .	133
2.3. Équation différentielle d'Euler. . . . .	135
2.4. Équation différentielle de Bernoulli. . . . .	138
2.5. Équation différentielle de Riccati. . . . .	139
2.6. Équations différentielles de Lagrange et de Clairaut. . . . .	140
3. Technique d'abaissement de l'ordre . . . . .	144
4. Qu'appelle-t-on « résolution explicite » ? . . . . .	145
5. Rappels sur les séries entières . . . . .	146
6. Développements en séries entières . . . . .	149
6.1. Théorie de Fuchs. . . . .	152
6.2. Développement en série entière en un point ordinaire. . . . .	153
6.3. Méthode de Frobenius pour un point singulier régulier. . . . .	156
6.4. Équations de Legendre et de Bessel. . . . .	165
Exercices . . . . .	177
<b>Chapitre 5. Étude qualitative</b>	<b>183</b>
1. Champs de vecteurs, isoclines et points stationnaires . . . . .	185
2. Équations autonomes . . . . .	189
2.1. Orbites d'une équation autonome. . . . .	189
2.2. Périodicité et point limite. . . . .	191
2.3. Intégrale première. . . . .	193
2.4. Systèmes hamiltoniens. . . . .	194
3. Dynamique des populations . . . . .	199
3.1. Équation logistique. . . . .	199
3.2. Système de Lotka-Volterra. . . . .	203
4. Systèmes linéaires de deux équations différentielles scalaires à coefficients constants . . . . .	209
5. Zones invariantes . . . . .	218
5.1. Obtention de bornes par l'étude de variations. . . . .	219
5.2. Entonnoirs et anti-entonnoirs. . . . .	222
Exercices . . . . .	232

<b>Chapitre 6. Stabilité des solutions d'équations différentielles</b>	<b>239</b>
1. Stabilité, définitions . . . . .	240
2. Stabilité, à partir des équations différentielles linéaires homogènes . . . . .	242
2.1. Cas linéaire homogène. . . . .	243
2.2. Cas semi-linéaire. . . . .	250
2.3. Linéarisation des systèmes autonomes. . . . .	253
3. Stabilité, avec les fonctions de Liapounov . . . . .	255
3.1. La notion de fonction de Liapounov. . . . .	255
3.2. Les résultats de stabilité via Liapounov. . . . .	258
4. Bifurcations . . . . .	264
Exercices . . . . .	265
<b>Chapitre 7. Hyperbolicité</b>	<b>269</b>
1. Théorème de redressement pour les points réguliers . . . . .	269
2. Théorème de Hartman-Grobman pour les points hyperboliques . . . . .	272
3. Application aux portraits de phase . . . . .	276
4. Variétés stable et instable . . . . .	279
Exercices . . . . .	282
<b>Chapitre 8. Localisation des zéros de solutions d'équations différentielles</b>	<b>283</b>
1. Zéros simples . . . . .	283
2. Théorie de Sturm . . . . .	285
Exercices . . . . .	290
<b>Chapitre 9. Théorie de Floquet</b>	<b>293</b>
1. Équation de Hill . . . . .	295
2. Surjectivité de l'exponentielle de matrice . . . . .	299
3. Théorème de Floquet . . . . .	304
4. Application à la stabilité . . . . .	311
Exercices . . . . .	315
<b>Chapitre 10. Étude numérique</b>	<b>317</b>
1. Approximation numérique . . . . .	317
2. Méthode d'Euler explicite . . . . .	318
3. Méthodes numériques à un pas . . . . .	322
4. Critères de convergence pour les méthodes numériques . . . . .	326
5. Méthode d'Euler implicite . . . . .	336
6. Méthodes de Runge-Kutta . . . . .	341
7. Choix de la méthode numérique . . . . .	348
Exercices . . . . .	348
<b>Chapitre 11. Problèmes aux limites</b>	<b>351</b>
1. Équation de Sturm-Liouville et fonction de Green . . . . .	353
2. Aspect numérique . . . . .	363
2.1. Description de la méthode numérique. . . . .	363
2.2. Convergence de la méthode. . . . .	365

3. Méthodes hilbertiennes . . . . .	369
3.1. Espaces hilbertiens. . . . .	369
3.2. Espaces de Sobolev. . . . .	370
3.3. Avec utilisation du théorème de Riesz. . . . .	379
3.4. Avec utilisation du théorème de Lax-Milgram. . . . .	384
Exercices . . . . .	386

## **Chapitre 12. Équations issues de la physique 389**

1. Astronomie . . . . .	389
1.1. Champs de vecteurs centraux. . . . .	390
1.2. Passage du problème à deux corps au problème à un corps. . . . .	394
1.3. Démonstration des lois de Kepler. . . . .	396
1.4. Le mouvement de la planète sur sa trajectoire. . . . .	399
2. Pendule . . . . .	401
2.1. L'équation différentielle du pendule sans frottement. . . . .	401
2.2. Cas $ v_0  > 2$ . . . . .	404
2.3. Cas $ v_0  = 2$ . . . . .	405
2.4. Cas $0 <  v_0  < 2$ . . . . .	407
2.5. Pendule avec frottement. . . . .	409
3. Équation de Newton . . . . .	411
4. Équation de Van der Pol . . . . .	415
5. EDP linéaire d'ordre 1 et méthode des caractéristiques . . . . .	427
5.1. Description de la méthode. . . . .	428
5.2. Flot. . . . .	430
5.3. Résultats. . . . .	432
5.4. Exemples. . . . .	435
5.5. Caractéristiques en dimension $N$ . . . . .	437
6. Équation de la chaleur et méthode de Fourier . . . . .	439
6.1. Équation de la chaleur et séries de Fourier. . . . .	439
6.2. Équation de la chaleur et transformée de Fourier. . . . .	448
Exercices . . . . .	451

## **Annexe A. Solutions des exercices 459**

1. Solutions des exercices du chapitre 1 . . . . .	459
2. Solutions des exercices du chapitre 2 . . . . .	464
3. Solutions des exercices du chapitre 3 . . . . .	527
4. Solutions des exercices du chapitre 4 . . . . .	543
5. Solutions des exercices du chapitre 5 . . . . .	570
6. Solutions des exercices du chapitre 6 . . . . .	594
7. Solutions des exercices du chapitre 7 . . . . .	600
8. Solutions des exercices du chapitre 8 . . . . .	607
9. Solutions des exercices du chapitre 9 . . . . .	611
10. Solutions des exercices du chapitre 10 . . . . .	616
11. Solutions des exercices du chapitre 11 . . . . .	638
12. Solutions des exercices du chapitre 12 . . . . .	652

<b>Annexe B. Algèbre</b>	<b>669</b>
1. Indépendance et bases . . . . .	669
2. Matrices . . . . .	669
3. Diagonalisation et réduction de Jordan . . . . .	670
<b>Annexe C. Géométrie</b>	<b>673</b>
1. Produit vectoriel . . . . .	673
2. Coniques . . . . .	673
<b>Annexe D. Analyse</b>	<b>675</b>
1. Fonctions . . . . .	675
1.1. Autour de la continuité. . . . .	675
1.2. Autour de la dérivabilité. . . . .	677
1.3. Convergence de suites de fonctions. . . . .	677
1.4. Séries de fonctions. . . . .	678
1.5. Régularisation. . . . .	679
2. Topologie . . . . .	681
2.1. Topologie dans les espaces métriques et les espaces vectoriels normés. . . . .	681
2.2. Espaces complets. . . . .	683
2.3. Espaces compacts. . . . .	683
2.4. Espaces connexes. . . . .	684
2.5. Théorèmes de points fixes. . . . .	684
3. Intégration . . . . .	687
3.1. Intersion. . . . .	687
3.2. Comparaison et équivalence. . . . .	688
3.3. Continuité et dérivabilité d'une intégrale à paramètre. . . . .	689
4. Fonctions analytiques réelles . . . . .	690
5. Séries et Transformées . . . . .	693
5.1. Séries de Fourier. . . . .	693
5.2. Transformée de Fourier. . . . .	696
5.3. Transformée de Laplace. . . . .	697
6. Calcul différentiel . . . . .	698
6.1. Différentiabilité. . . . .	698
6.2. Formules de Taylor et extremum. . . . .	700
6.3. Relèvement, inversion et fonctions implicites. . . . .	701
<b>Bibliographie</b>	<b>703</b>
<b>Index</b>	<b>705</b>