
TABLE DES MATIÈRES

Introduction *v*

Table des matières *vii*

— Première partie —

Calculs à la Gauss

Formules de Gauss pour les petites erreurs **2**

5

Chapitre 1

Les diverses approches

- 1 — Ce qui est enseigné ordinairement et sa critique **5**
- 2 — Classification des calculs d'erreur **8**

11

Chapitre 2

Exemples en dimension finie

- 1 — Frottement visqueux **11**
- 2 — Cordes de Joseph Bertrand **12**
- 3 — Système de Ptolémée **14**
- 4 — Champ de vitesses **15**
- 5 — Systèmes dynamiques **16**
- 6 — Erreur fonction de la valeur mesurée **17**
- 7 — Opérateur quadratique de Gauss **18**
- 8 — Intégrale de Riemann d'une fonction mal connue **20**

23

Chapitre 3

Introduction intuitive aux structures d'erreur

- 1 — Ordres de grandeur des erreurs 23
- 2 — Description des petites erreurs par biais et variances 24
 - 2.1 — En dimension 1 25
 - 2.2 — En dimension 2 26
- 3 — Notion intuitive de structure d'erreur 30
 - 3.1 — Structure d'erreur, définition provisoire 30
 - 3.2 — Le biais 31
 - 3.3 — En résumé 31
- 4 — Comment procéder à un calcul d'erreur 32
- 5 — Application : intégration par partie 33

39

Chapitre 4

Erreurs faiblement et fortement aléatoires

- 1 — La dichotomie des petites erreurs 39
- 2 — L'analyse numérique usuelle revisitée 41
- 3 — Les erreurs dues aux graduations sont fortement aléatoires 42

— Deuxième partie —

Modèles probabilistes et fonctionnels

Définir un calcul d'erreur intrinsèque 46

49

Chapitre 5

Semi-groupes fortement continus et formes de Dirichlet

- 1 — Rappels 49
- 2 — Semi-groupes fortement continus sur un espace de Banach 51
- 3 — Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$ et la forme associée 55
- 4 — Détermination du domaine $\mathbb{D}$ pour ce semi-groupe 65

69

Chapitre 6

Structures d'erreur

- 1 — Définition fondamentale et premiers exemples 69
- 2 — Mener des raisonnements dans les structures d'erreur 75
 - 2.1 — Continuité de Γ 75
 - 2.2 — Approximation par des fonctions bornées 75
 - 2.3 — Approximation par sous-suite 75
 - 2.4 — Suite faiblement bornée 76
- 3 — Calculs fonctionnels lipschitziens 76
- 4 — Existence de densités 79
- 5 — Fermabilité de pré-structures et autres exemples 82

89

Chapitre 7

Images et produits de structures d'erreur

- 1 — Images 89
- 2 — Produits finis 94
- 3 — Produits infinis 97

105

Chapitre 8

Le gradient et le dièse et autres outils

- 1 — Exemples simples commentés 106
 - 1.1 — Tube cathodique 106
 - 1.2 — Commentaire sur le choix de $\Gamma[X]$ et de $A[X]$ 109
 - 1.3 — Modèles de taux d'intérêt 111
- 2 — Le gradient et le dièse 114
 - 2.1 — Le gradient 114
 - 2.2 — Le dièse 116
 - 2.3 — L'adjoint δ ou opérateur « divergence » 116
- 3 — Formules d'intégration par parties 117
- 4 — Sensibilité à un coefficient fonctionnel 119
 - 4.1 — Structures d'erreur sur les espaces fonctionnels 119
 - 4.2 — Choix de la probabilité a priori 120
 - 4.3 — Choix de Γ 121
 - 4.4 — Fonctions analytiques dans le disque unité 121
 - 4.5 — Fonctions dans L^2 122
 - 4.6 — Sensibilité d'une équation différentielle ordinaire 122

- 5 — Sous-structures et projections 125
 - 5.1 — Sous-structures d'erreur 125
 - 5.2 — Remarques sur les projections et le calcul conditionnel 126
- 6 — Gradient-mesure stable par image 129
 - 6.1 — Le gradient à valeur mesure 129
 - 6.2 — Images 134
 - 6.3 — Exemple 136

139

Chapitre 9

Structures d'erreur sur les espaces fondamentaux

- 1 — Structures d'erreur sur l'espace de Monte Carlo 139
 - 1.1 — Structure sans termes de bords 140
 - 1.2 — Exemple : Sensibilité d'une chaîne de Markov 143
 - 1.3 — La structure pseudo-gaussienne sur l'espace de Monte Carlo 145
 - 1.4 — Décomposition de Hoeffding-Sobol. Analyse de sensibilité globale ou locale 146
- 2 — Structures d'erreur sur l'espace de Wiener 149
 - 2.1 — L'intégrale stochastique de Wiener 149
 - 2.2 — Structures d'erreur produit 150
 - 2.3 — La structure d'Ornstein-Uhlenbeck 150
 - 2.4 — Structures avec temps erroné 158
 - 2.5 — Structures de type Mehler généralisé 161
- 3 — Théorème de type Donsker 169
 - 3.1 — Convergence en loi de Dirichlet 170
 - 3.2 — Convergence d'une promenade aléatoire erronée 171
 - 3.3 — Application 178
 - 3.4 — Indépendance asymptotique 179
- 4 — Structures d'erreur sur l'espace de Poisson 180
 - 4.1 — Construction d'une mesure aléatoire de Poisson d'intensité μ 180
 - 4.2 — Structure blanche sur l'espace de Poisson général 182
 - 4.3 — La structure d'erreur de Carlen-Pardoux 191

— Troisième partie —

Les subtilités de la notion de biais

La non-antisymétrie des erreurs d'approximation 196

199

Chapitre 10

Approximations et opérateurs de biais

- 1 — Les opérateurs de biais 199
- 2 — Erreur dans le théorème de Glivenko-Cantelli 211
- 3 — Formules typiques du calcul d'erreur finidimensionnel 212
 - 3.1 — Triplet typique 212
 - 3.2 — Séries à accroissements indépendants 214
 - 3.3 — Queues de martingales 215
- 4 — Imprécision naturelle du mouvement brownien 217
 - 4.1 — Imprécision naturelle dans le théorème de limite centrale 217
 - 4.2 — Le cas Donsker par les approximations 218
- 5 — Lois empiriques et pont brownien 221
 - 5.1 — Imprécision naturelle du pont brownien 221
 - 5.2 — Lois empiriques erronées et structures de type Mehler généralisé sur le pont brownien 222
- 6 — Autre approche du théorème de Donsker 225
- 7 — Intégrale stochastique 226
- 8 — Équations différentielles stochastiques et schéma d'Euler 232
- 9 — Retour sur les erreurs faiblement aléatoires 236

239

Chapitre 11

Calculs et méthodes de simulation

- 1 — Le biais simulé par paquets 239
- 2 — Visualisation géométrique du biais 241
- 3 — Méthode du décalage (shift) 243
- 4 — Suites réparties selon la mesure de Wiener 247
 - 4.1 — Intégration de fonctions continues de fonctionnelles du premier chaos 249
 - 4.2 — Un résultat effectif 250
- 5 — Accélération de simulations grâce aux structures d'erreur 253
 - 5.1 — Diminution de la variance grâce au biais 256
 - 5.2 — Comparaison des vitesses 259

- 5.3 — Formules explicites directes 260
- 6 — Minimiser l'erreur, équations d'Euler stochastiques 263
 - 6.1 — Cas se ramenant au calcul des variations classique 263
 - 6.2 — Réduction de variance et d'erreur 264
 - 6.3 — Équations d'Euler stochastiques 265
 - 6.4 — Troisième forme 268

—— Quatrième partie ——

Structures d'erreur dans les applications

Identification d'une structure d'erreur 272

273

Chapitre 12
 Identification statistique des structures d'erreur

- 1 — Identité de Cramer-Rao et identification fondamentale 274
 - 1.1 — Modèles réguliers 274
 - 1.2 — Inégalité de Cramer-Rao 275
- 2 — Changement de variables : cas injectif 277
 - 2.1 — Cas injectif régulier 277
 - 2.2 — Cas injectif non régulier 278
- 3 — Indications sur le cas non injectif 279
- 4 — Structures produit 279

285

Chapitre 13
 Structure instantanée d'un processus

- 1 — Cas d'un processus de Markov 285
- 2 — Processus stationnaire gaussien 287
- 3 — Processus strictement stationnaire non gaussien 290
- 4 — Exemple lié au filtrage de Wiener 291
- 5 — Investigations sur les erreurs cumulatives 294
 - 5.1 — Dièse approché 294
 - 5.2 — Exemple 296
 - 5.3 — Martingale au sens de la forme de Dirichlet 298

301

Chapitre 14

Modèles inspirés de la finance

- 1 — Structure d'erreur instantanée d'un actif financier 301
 - 1.1 — Mouvement brownien géométrique et structure d'erreur log-normale homogène 303
 - 1.2 — Modèle avec trois devises compatibles 304
- 2 — Calculs d'erreur sur le modèle de Black-Scholes 306
 - 2.1 — Sensibilité du pricing et de la couverture théoriques aux erreurs sur les paramètres 306
 - 2.2 — Erreurs dues au trader 311
- 3 — Cas d'un modèle de diffusion 314
 - 3.1 — Sensibilité du modèle théorique à des erreurs sur le mouvement brownien 315
 - 3.2 — Sensibilité de la solution d'une EDS à une erreur sur une des fonctions coefficient de l'équation 320
 - 3.3 — Erreur sur la volatilité locale due au trader 326

331

Chapitre 15

Exemples en physique

- 1 — Exemple en dimension finie 331
- 2 — Épreuves répétées, discussion d'une remarque de Poincaré 334
- 3 — Systèmes projectifs et épreuves répétées 338
- 4 — Calcul de longueurs par la méthode de Cauchy-Favard 341
- 5 — Température d'équilibre d'un solide homogène 345

353

Chapitre 16

Principe des fonctions arbitraires et structures d'erreur

- 1 — Structures d'erreur naturelles sur certains systèmes dynamiques 353
 - 1.1 — Théorèmes limites dans le style Poincaré-Hopf 355
 - 1.2 — Cas multidimensionnel, exemples 358
- 2 — Biais dans le principe des fonctions arbitraires en dimension finie 362
 - 2.1 — Théorème de type Girsanov pour les structures d'erreur 362

- 2.2 — Mesures de Rajchman 363
- 3 — Principe des fonctions arbitraires sur l'espace de Wiener 369
 - 3.1 — Martingales de type Rajchman 369
 - 3.2 — Conditions suffisantes de fermabilité sur l'espace de Wiener 372
 - 3.3 — Équations différentielles stochastiques tirées de la mécanique 373

— Cinquième partie —

Éléments historiques et thèmes de recherche

Le monde microscopique est très richement aléatoire 378

381

Chapitre 17

Calculs d'erreurs depuis Gauss et Laplace

- 1 — Différentes sortes de calculs d'erreur 381
- 2 — Gauss inventeur de l'opérateur quadratique 384
- 3 — Pourquoi demander que la forme quadratique soit fermée? 388
- 4 — Forme de Dirichlet engendrée par une approximation 390
- 5 — Des « petites erreurs », qu'est-ce que cela signifie? 392
- 6 — Origines du principe des fonctions arbitraires 394

397

Chapitre 18

Prolongements et questions ouvertes

- 1 — Questions liées aux applications 397
 - 1.1 — Extension des méthodes statistiques 397
 - 1.2 — Problèmes aux limites 397
 - 1.3 — Endomorphismes de structures d'erreur 399
 - 1.4 — Physique statistique et quantique 399
- 2 — Approfondissements et prolongements de la théorie des erreurs 400
 - 2.1 — Méthode de simulation par paquets 400
 - 2.2 — Extension de l'interprétation par l'information de Fisher à la dimension infinie 401
 - 2.3 — Limites projectives avec le générateur au lieu de la forme 401
 - 2.4 — Répartition empirique de suites équiréparties 402

2.5	— Structure d'erreur instantanée d'un processus stochastique	402
2.6	— Structures d'erreur et théorie des capacités	403
3	— Problèmes mathématiques ouverts et conjectures	403
3.1	— Caractérisation des formes de Dirichlet en dimension 2 et supérieures	403
3.2	— Conjecture de la densité de l'énergie image (EID)	404
	Indications sur les exercices	407
	Références pédagogiques	419
	Bibliographie chronologique	425
	Index	439

