

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Avant-propos | XI |
| Notations et terminologie | I |
| Introduction | 5 |
| Chapitre 1. L'intégrale des fonctions continues | II |
| 1.1. Propriétés élémentaires | 11 |
| 1.1.1. Premières propriétés | 13 |
| 1.1.2. Intégrales et primitives | 14 |
| 1.1.3. Deux formules indispensables | 18 |
| 1.1.4. La formule de Taylor avec reste intégral | 20 |
| 1.2. Les intégrales impropres | 22 |
| 1.2.1. Définitions | 22 |
| 1.2.2. Quelques propriétés | 23 |
| 1.2.3. Lien entre série et intégrale | 26 |
| 1.2.4. Intégrales absolument convergentes | 26 |
| 1.3. Permutation des symboles \lim , \sum et \int | 31 |
| 1.3.1. Le cas des intégrales de fonctions continues sur $[a, b]$ | 31 |
| 1.3.2. Le cas des intégrales impropres | 34 |
| 1.3.3. Théorèmes de permutation de Lebesgue | 36 |
| 1.3.4. Permutation dans le cas semi-convergent | 39 |
| 1.4. Fonctions définies par une intégrale | 40 |
| 1.4.1. Les théorèmes de Lebesgue | 42 |
| 1.4.2. Un théorème « classique » | 48 |
| 1.5. La fonction Γ | 49 |
| 1.6. Intégrales de Laplace | 51 |
| 1.6.1. Lemme de Watson | 52 |
| 1.6.2. Méthode de Laplace | 55 |
| 1.6.3. La méthode de la phase stationnaire | 60 |
| 1.7. La formule d'Euler-MacLaurin | 63 |
| 1.7.1. Les polynômes de Bernoulli | 64 |
| 1.7.2. La formule d'Euler-MacLaurin | 66 |
| 1.7.3. Développement asymptotique des sommes partielles d'une série | 70 |
| 1.7.4. La constante de Ramanujan d'une série | 74 |

| | |
|---|------------|
| Appendice : continuité uniforme et existence de l'intégrale | 75 |
| Exercices | 79 |
| Chapitre 2. Intégrales et résidus | 85 |
| 2.1. Analyticité et dérivabilité | 85 |
| 2.1.1. Définitions et propriétés | 85 |
| 2.1.2. Construction de fonctions analytiques | 96 |
| 2.2. Intégrale curviligne | 99 |
| 2.2.1. Définition | 99 |
| 2.2.2. Homotopie | 102 |
| 2.2.3. Le problème des primitives | 107 |
| 2.3. Prolongement analytique et points singuliers | 109 |
| 2.3.1. Prolongement analytique | 109 |
| 2.3.2. Points singuliers | 113 |
| 2.3.3. Théorème des résidus | 118 |
| 2.3.4. Logarithme et puissances complexes | 121 |
| 2.4. La fonction gamma dans le plan complexe | 126 |
| 2.5. Calculs d'intégrales | 129 |
| 2.6. Calculs de sommes | 140 |
| 2.6.1. Utilisation de la cotangente | 140 |
| 2.6.2. Formule de Plana | 143 |
| 2.7. La méthode du col | 148 |
| 2.7.1. Le choix du chemin | 148 |
| 2.7.2. Étude locale au col | 152 |
| 2.7.3. Application : Comportement en $+\infty$ de la fonction d'Airy fonction $!d$ 'Airy | 154 |
| Exercices | 157 |
| Chapitre 3. L'intégrale de Lebesgue | 161 |
| 3.1. Une première extension de l'intégrale | 161 |
| 3.2. La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} | 164 |
| 3.3. Les fonctions mesurables | 169 |
| 3.4. Intégration des fonctions mesurables | 174 |
| 3.4.1. Intégration des fonctions étagées positives | 174 |
| 3.4.2. Intégration des fonctions mesurables positives | 176 |
| 3.4.3. Intégration des fonctions intégrables quelconques | 181 |
| 3.4.4. Presque partout | 182 |
| 3.4.5. La relation intégrale \leftrightarrow primitive | 183 |
| 3.5. Théorèmes de permutation | 186 |
| 3.6. Lien avec l'intégrale usuelle | 190 |
| 3.7. Fonctions définies par une intégrale | 193 |
| 3.8. Intégration par rapport à une autre mesure | 194 |
| Exercices | 197 |

| | |
|--|------------|
| Chapitre 4. Intégrales multiples | 201 |
| 4.1. L'intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}^n | 201 |
| 4.1.1. La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n | 202 |
| 4.1.2. Intégration des fonctions définies sur \mathbb{R}^n | 207 |
| 4.1.3. Intégrabilité et calcul des intégrales | 208 |
| 4.2. Changement de variables dans \mathbb{R}^n | 216 |
| 4.3. Intégrales liées aux courbes et aux surfaces | 226 |
| 4.3.1. L'intégrale sur une courbe de \mathbb{R}^2 | 226 |
| 4.3.2. L'intégrale sur une surface de \mathbb{R}^3 | 230 |
| 4.4. Formule de Stokes | 233 |
| 4.5. Les fonctions harmoniques sur \mathbb{R}^2 | 237 |
| Exercices | 242 |
| Chapitre 5. Espaces L^p et convolution | 249 |
| 5.1. Préliminaires topologiques | 249 |
| 5.1.1. Espaces normés | 249 |
| 5.1.2. Espaces de Hilbert | 256 |
| 5.1.3. Le théorème de Stone-Weierstrass | 258 |
| 5.2. L'espace des fonctions intégrables | 259 |
| 5.2.1. Définition de $L^1(A)$. $L^1(A)$ est complet | 259 |
| 5.2.2. Lien entre convergence presque partout et convergence L^1 | 264 |
| 5.3. L'espace des fonctions de carré intégrable | 266 |
| 5.3.1. Définition de $L^2(A)$. $L^2(A)$ est complet | 266 |
| 5.3.2. L^1 , L^2 et convergence presque partout | 270 |
| 5.4. Sous-espaces denses | 272 |
| 5.5. Les polynômes de Legendre | 275 |
| 5.6. Fonctions d'Hermite et espace de Bargmann | 280 |
| 5.7. Espaces L^p , $p > 1$ | 284 |
| 5.8. Convolution sur \mathbb{R} | 285 |
| 5.8.1. Définitions et propriétés | 285 |
| 5.8.2. Régularisation gaussienne | 295 |
| Exercices | 299 |
| Chapitre 6. Les séries de Fourier | 303 |
| 6.1. Position du problème | 303 |
| 6.2. Les séries $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ | 304 |
| 6.3. Convergence L^2 | 307 |
| 6.4. Convergence ponctuelle | 312 |
| 6.5. Convolution | 323 |
| 6.6. La transformation $\mathcal{F}_{\text{pér}}$ | 324 |

| | |
|--|-----|
| 6.7. Procédés de sommation des séries de Fourier | 328 |
| 6.7.1. Sommation de Cesàro | 329 |
| 6.7.2. Noyaux réguliers | 330 |
| 6.7.3. Sommation d'Abel | 335 |
| 6.8. L'intervention de l'analyse fonctionnelle | 339 |
| Exercices | 346 |

Chapitre 7. Transformation de Fourier **351**

| | |
|--|-----|
| 7.1. Des séries de Fourier à la transformation de Fourier | 351 |
| 7.2. Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ | 352 |
| 7.3. Transformée de Fourier des gaussiennes | 356 |
| 7.4. Inversion de la transformation de Fourier | 359 |
| 7.5. Formule d'inversion ponctuelle | 362 |
| 7.6. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ | 365 |
| 7.7. Transformation de Fourier et convolution | 366 |
| 7.8. La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ | 368 |
| 7.8.1. Définition et propriétés de \mathcal{F} sur $L^2(\mathbb{R})$ | 368 |
| 7.8.2. Calcul pratique de $\mathcal{F}f$ | 376 |
| 7.9. Noyaux de sommation pour les intégrales de Fourier | 377 |
| 7.10. Fourier dans l'espace de Bargmann | 379 |
| 7.11. Propriétés de localisation et de support | 382 |
| 7.11.1. L'inégalité de Heisenberg | 383 |
| 7.11.2. Le théorème de Paley-Wiener | 385 |
| 7.12. Un point de vue unificateur : les distributions | 389 |
| 7.12.1. Les distributions | 389 |
| 7.12.2. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ | 391 |
| Exercices | 397 |

Chapitre 8. De l'équation de la chaleur aux nombres premiers. **401**

| | |
|---|-----|
| 8.1. L'équation de la chaleur | 401 |
| 8.2. La formule de Poisson | 406 |
| 8.2.1. La formule de Poisson sur \mathbb{R} | 406 |
| 8.2.2. Développement de la cotangente | 410 |
| 8.3. La fonction zêta | 412 |
| 8.3.1. La formule d'Euler | 412 |
| 8.3.2. Expression intégrale et équation fonctionnelle pour la fonction ζ | 413 |
| 8.4. Fonctions entières et produits infinis | 416 |
| 8.4.1. Convergence d'un produit infini | 416 |
| 8.4.2. Produit infini de fonctions | 418 |
| 8.4.3. Factorisation d'une fonction entière | 419 |
| 8.4.4. Les fonctions Γ et sinus comme produits infinis | 420 |
| 8.5. Les zéros de ζ | 423 |

| | |
|--|------------|
| 8.5.1. Les zéros triviaux | 423 |
| 8.5.2. Les zéros non triviaux | 423 |
| 8.5.3. Le développement de ζ en produit infini | 426 |
| 8.6. La répartition des nombres premiers | 427 |
| 8.6.1. Fonctions de comptage | 427 |
| 8.6.2. La fonction ψ et la dérivée logarithmique de ζ | 429 |
| 8.7. Transformation de Mellin | 431 |
| 8.7.1. Définition et prolongement analytique | 431 |
| 8.7.2. L'inversion de Mellin | 433 |
| 8.7.3. La formule explicite de von Mangoldt | 436 |
| 8.8. L'article de Riemann sur les nombres premiers | 439 |
| Petits sujets de réflexion | 446 |
| Bibliographie | 457 |
| Index | 459 |