

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION	v
COMMENT UTILISER CE LIVRE.	vii
QU'EST-CE QUE LES MATHÉMATIQUES ?	1
CHAPITRE I. LES NOMBRES NATURELS	7
Introduction	7
§1. Calcul avec des nombres entiers	8
1. Les lois de l'arithmétique, 8. — 2. La représentation des entiers, 11. —	
3. Calcul dans des systèmes autres que le système décimal, 13.	
*§2. L'infinitude du système des nombres. L'induction mathématique	16
1. Le principe de récurrence, 16. — 2. La progression arithmétique, 18.	
— 3. La progression géométrique, 20. — 4. La somme des n premiers	
carrés, 21. — *5. Une inégalité importante, 22. — *6. La formule du	
binôme, 23. — *7. Autres remarques sur la récurrence, 25.	
SUPPLÉMENT AU CHAPITRE I. THÉORIE DES NOMBRES	29
Introduction	29
§1. Les nombres premiers	29
1. Résultats essentiels, 29. — 2. La répartition des nombres premiers, 33.	
§2. Congruences	40
1. Notions générales, 40. — 2. Le théorème de Fermat, 46. — 3. Résidus	
quadratiques, 47.	
§3. Les triplets pythagoriciens et le grand théorème de Fermat	49
§4. L'algorithme d'Euclide	52
1. Théorie générale, 52. — 2. Application au théorème fondamental de	
l'arithmétique, 56. — 3. Fonction φ d'Euler. Retour sur le théorème de	
Fermat, 57. — 4. Fractions continues. Équations diophantiennes, 59.	
CHAPITRE II. LE SYSTÈME DES NOMBRES	67
§1. Les nombres rationnels	67
1. Les nombres rationnels comme outil de mesure, 67. — 2. Nécessité	
essentielle des nombres rationnels. Principe de généralisation, 69. —	
3. Interprétation géométrique des nombres rationnels, 72.	
§2. Segments incommensurables, nombres irrationnels, notion de limite	73
1. Introduction, 73. — 2. Fractions décimales. Décimaux infinis, 76. —	
3. Limites. Séries géométriques infinies, 79. — 4. Nombres rationnels et	
décimaux périodiques, 82. — 5. Définition générale des nombres irrationnels	
par intervalles emboîtés, 84. — *6. Autres façons de définir les nombres ir-	
rationnels. Coupures de Dedekind, 87.	

§3. Remarques sur la géométrie analytique *	89
1. Principe de base, 89. — *2. Équations de droites et équations de courbes, 90.	
§4. L'analyse mathématique de l'infini	94
1. Notions fondamentales, 94. — 2. La dénombrabilité des nombres rationnels et la non-dénombrabilité du continu, 96. — 3. Les « nombres cardinaux » de Cantor, 100. — 4. Les démonstrations par l'absurde, 103. — 5. Les paradoxes de l'infini, 104. — 6. Les fondements des mathématiques, 104.	
§5. Les nombres complexes.	105
1. L'origine des nombres complexes, 105. — 2. L'interprétation géométrique des nombres complexes, 109. — 3. Formule de De Moivre et racines de l'unité, 115. — *4. Le théorème fondamental de l'algèbre, 118.	
*§6. Nombres algébriques et nombres transcendants	121
1. Définition et existence, 121. — **2. Le théorème de Liouville et la construction de nombres transcendants, 122.	
SUPPLÉMENT AU CHAPITRE II. L'ALGÈBRE DES ENSEMBLES	
§1. Théorie générale	129
§2. Application à la logique mathématique.	134
§3. Une application à la théorie des probabilités	135
CHAPITRE III. CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES. CORPS DE NOMBRES	
Introduction	139
Partie I. Démonstrations d'impossibilité et algèbre	
§1. Constructions géométriques fondamentales	142
1. Construction de corps et extraction de racine carrée, 142. — 2. Polygones réguliers, 145. — *3. Le problème d'Apollonius, 148.	
*§2. Nombres constructibles et corps de nombres	150
1. Théorie générale, 150. — 2. Tous les nombres constructibles sont algébriques, 156.	
*§3. L'impossibilité de résoudre à la règle et au compas les trois problèmes grecs	157
1. La duplication du cube, 157. — 2. Un théorème sur les équations du troisième degré, 159. — 3. La trisection de l'angle, 161. — 4. L'heptagone régulier, 162. — 5. Remarques sur le problème de la quadrature du cercle, 164.	
Partie II. Différentes méthodes pour réaliser des constructions	
§4. Transformations géométriques. Inversion	164
1. Remarques générales, 164. — 2. Propriété de l'inversion, 166. — 3. Construction géométrique des points inverses, 168. — 4. Comment diviser un segment en deux parties égales et trouver le centre d'un cercle à l'aide du compas seul, 170.	

*Pour les lecteurs qui ne connaissent pas le sujet, une série d'exercices sur les éléments de la géométrie analytique est disponible dans l'appendice à la fin de ce livre, p. 539-562.

§5. Autres instruments de constructions. Les constructions de Mascheroni au moyen du compas seul	171
*1. Un mode de construction classique pour la duplication du cube, 171. — 2. Limitation au seul usage du compas, 172. — 3. Tracer avec des instruments mécaniques. Courbes mécaniques. Cycloïdes, 176. — *4. Mécanismes. Inverseurs de Peaucellier et de Hart, 179.	
§6. Quelques mots de plus au sujet de l'inversion et de ses applications	182
1. Invariance des angles. Familles de cercles, 182. — 2. Application au problème d'Apollonius, 185. — *3. Réflexions répétées, inversions répétées, 186.	
CHAPITRE IV. GÉOMÉTRIE PROJECTIVE. AXIOMATIQUE	189
§1. Introduction	189
1. Classification des propriétés géométriques. Invariants par transformations, 189. — 2. Transformations projectives, 191.	
§2. Notions fondamentales	192
1. Le groupe des transformations projectives, 192. — 2. Le théorème de Desargues, 194.	
§3. Birapport	196
1. Définition et démonstration de l'invariance, 196. — 2. Application au quadrilatère complet, 203.	
§4. Parallélisme et infini	204
1. Points à l'infini comme « points idéaux », 204. — 2. Éléments idéaux et projection, 207. — 3. Birapport comprenant des éléments à l'infini, 209.	
§5. Applications	210
1. Remarques préliminaires, 210. — 2. Démonstration du théorème de Desargues dans le plan, 212. — 3. Le théorème de Pascal, 213. — 4. Théorème de Brianchon, 214. — 5. Remarque sur la dualité, 215.	
§6. Représentation analytique	216
1. Remarques introductives, 216. — *2. Coordonnées homogènes. La base algébrique de la dualité, 217.	
§7. Problèmes de constructions avec la règle comme seul instrument	221
§8. Coniques et quadriques	223
1. Géométrie métrique élémentaire des coniques, 223. — 2. Propriétés projectives des coniques, 226. — 3. Les coniques en tant que courbes de droites, 230. — 4. Théorèmes généraux de Pascal et de Brianchon pour les coniques, 234. — 5. L'hyperboloïde, 237.	
§9. Axiomatiques et géométrie non euclidienne.	239
1. La méthode axiomatique, 239. — 2. La géométrie non euclidienne hyperbolique, 243. — 3. Géométrie et réalité, 248. — 4. Le modèle de Poincaré, 249. — 5. Géométrie elliptique ou riemannienne, 250.	
Appendice. La géométrie en dimension supérieure à trois	252
1. Introduction, 252. — 2. Approche analytique, 253. — *3. Approche géométrique ou combinatoire, 255.	
CHAPITRE V. TOPOLOGIE	261
Introduction	261
§1. Formule d'Euler pour les polyèdres	262

§2. Propriétés topologiques des figures 267
 1. Propriétés topologiques, 267. — 2. Connexité, 269.

§3. Autres exemples de théorèmes topologiques 271
 1. Le théorème de la courbe de Jordan, 271. — 2. Le problème des quatre couleurs, 272. — *3. La notion de dimension, 274. — *4. Un théorème de point fixe, 278. — 5. Nœuds, 281.

§4. La classification topologique des surfaces 282
 1. Le genre d'une surface, 282. — *2. La caractéristique d'Euler d'une surface, 284. — 3. Surfaces à une face, 285.

§5. Appendice 290
 *1. Le théorème des cinq couleurs, 290. — 2. Le théorème de la courbe de Jordan dans le cas des polygones, 293. — **3. Le théorème fondamental de l'algèbre, 296.

CHAPITRE VI. FONCTIONS ET LIMITES. 309

Introduction 309

§1. Variable et fonction 310
 1. Définitions et exemples, 310. — 2. Mesure des angles en radians, 314. — 3. Le graphe d'une fonction. Fonctions réciproques, 315. — 4. Fonctions composées, 319. — 5. Continuité, 321. — *6. Fonctions de plusieurs variables, 323. — *7. Fonctions et transformations, 326.

§2. Limites 327
 1. Limite d'une suite a_n , 327. — 2. Suites monotones, 332. — 3. Le nombre d'Euler e , 335. — 4. Le nombre π , 337. — *5. Fractions continues, 338.

§3. Les limites par approche continue 341
 1. Introduction. Définition générale, 341. — 2. Remarque sur la notion de limite, 343. — 3. La limite de $\frac{\sin x}{x}$, 345. — 4. Limites lorsque $x \rightarrow \infty$, 347.

§4. La définition précise de la continuité 348

§5. Deux théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues 351
 1. Le théorème de Bolzano, 351. — *2. Démonstration du théorème de Bolzano, 351. — 3. Le théorème de Weierstrass pour les valeurs extrêmes, 352. — *4. Un théorème sur les suites. Ensembles compacts, 354.

§6. Quelques applications du théorème de Bolzano 355
 1. Applications géométriques, 355. — *2. Application à un problème de mécanique, 358.

SUPPLÉMENT AU CHAPITRE VI. AUTRES EXEMPLES DE LIMITES ET DE CONTINUITÉ 363

§1. Exemples de limites 363
 1. Remarques générales, 363. — 2. La limite de q^n , 363. — 3. La limite de $\sqrt[n]{p}$, 364. — 4. Fonctions discontinues comme limites de fonctions continues, 366. — *5. Limites par itération, 367.

§2. Exemple de continuité. 369

CHAPITRE VII. MAXIMA ET MINIMA 371

Introduction 371

§1. Problèmes de géométrie élémentaire	372
1. Aire maximum d'un triangle quand deux côtés sont donnés, 372. —	
2. Théorème de Héron. Propriétés d'extremum des rayons lumineux, 372.	
— 3. Application à des problèmes concernant des triangles, 374. —	
4. Propriétés tangentielles de l'ellipse et de l'hyperbole. Propriétés d'extremum correspondantes, 375. — *5. Extremum des distances à une courbe donnée, 379.	
*§2. Un principe général sous-jacent aux problèmes de valeurs extrêmes . . .	381
1. Le principe, 381. — 2. Exemples, 382.	
§3. Points stationnaires et calcul différentiel	384
1. Extrema et points stationnaires, 384. — 2. Maxima et minima des fonctions à plusieurs variables. Points-selles, 385. — 3. Points minimax et topologie, 387. — 4. La distance d'un point à une surface, 388.	
§4. Le problème du triangle de Schwarz.	389
1. La démonstration de Schwarz, 389. — 2. Une autre démonstration, 392. — 3. Triangles obtus, 394. — 4. Triangles formés par des rayons lumineux, 395. — *5. Remarques concernant les problèmes de réflexion et le mouvement ergodique, 396.	
§5. Le problème de Steiner	397
1. Problème et solution, 397. — 2. Analyse des possibilités, 399. — 3. Problème complémentaire, 401. — 4. Remarques et exercices, 402. — 5. Généralisation au problème du réseau routier, 403.	
§6. Extrema et inégalités	405
1. La moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux quantités positives, 405. — 2. Généralisation à n variables, 407. — 3. La méthode des moindres carrés, 408.	
§7. Existence d'un extremum. Principe de Dirichlet	410
1. Remarques générales, 410. — 2. Exemples, 412. — 3. Problèmes d'extremum élémentaires, 414. — 4. Difficultés dans les situations moins élémentaires, 416.	
§8. Le problème isopérimétrique	417
§9. Problèmes d'extremum avec conditions aux limites. Les liens entre le problème de Steiner et le problème isopérimétrique	421
§10. Le calcul des variations	424
1. Introduction, 424. — 2. Le calcul des variations. Le principe de Fermat en optique, 425. — 3. Traitement par Bernoulli du problème de la brachistochrone, 428. — 4. Géodésiques d'une sphère. Géodésiques et maxi-minima, 429.	
§11. Solutions expérimentales aux problèmes de minimum. Expériences sur les films de savon.	430
1. Introduction, 430. — 2. Expériences sur les films de savon, 431. — 3. Nouvelles expériences sur le problème de Plateau, 433. — 4. Solutions expérimentales à d'autres problèmes mathématiques, 437.	
CHAPITRE VIII. LE CALCUL INFINITÉSIMAL	443
Introduction	443
§1. L'intégrale	445
1. L'aire comme limite, 445. — 2. L'intégrale, 446. — 3. Remarques générales sur la notion d'intégrale. Définition générale, 450. — 4. Exemples	

d'intégration. Intégration de x^r , 452. — 5. Règles pour le « calcul intégral », 457.	
§2. La dérivée	461
1. La dérivée comme pente, 461. — 2. La dérivée comme limite, 462. — 3. Exemples, 465. — 4. Dérivées des fonctions trigonométriques, 468. — *5. Dérivabilité et continuité, 469. — 6. Dérivée et vitesse. Dérivée seconde et accélération, 469. — 7. Signification géométrique de la dérivée seconde, 472. — 8. Maxima et minima, 473.	
§3. La technique de dérivation.	474
§4. Notation de Leibniz et « infiniment petits »	480
§5. Le théorème fondamental de l'analyse	483
1. Le théorème fondamental, 483. — 2. Premières applications. Intégration de x^r , $\cos x$, $\sin x$, $\arctan x$, 486. — 3. Formule de Leibniz pour π , 488.	
§6. La fonction exponentielle et le logarithme.	490
1. Définitions et propriété du logarithme. Nombre e d'Euler, 490. — 2. La fonction exponentielle, 493. — 3. Formules de dérivation pour e^x , a^x , x^s , 495. — 4. Expressions explicites pour e , e^x et $\log x$ comme limites, 496. — 5. Série infinie pour le logarithme. Calcul numérique, 499.	
§7. Équations différentielles	502
1. Définition, 502. — 2. L'équation différentielle de la fonction exponentielle. Désintégration radioactive. Loi de croissance. Intérêts composés, 502. — 3. Autres exemples. Vibrations simples, 506. — 4. La loi de la dynamique de Newton, 508.	
SUPPLÉMENT AU CHAPITRE VIII	513
§1. Questions de principe	513
1. Dérivabilité, 513. — 2. L'intégrale, 515. — 3. Autres applications de la notion d'intégrale. Travail. Longueur, 516.	
§2. Ordres de grandeur	520
1. La fonction exponentielle et les puissances de x , 520. — 2. Ordre de grandeur de $\log(n!)$, 522.	
§3. Séries infinies et produits	523
1. Séries infinies de fonctions, 523. — 2. Formule d'Euler, $\cos x + i \sin x = e^{ix}$, 529. — 3. La série harmonique et la fonction zêta. Produit d'Euler pour le sinus, 531.	
**§4. Le théorème des nombres premiers obtenu par des méthodes statistiques.	535
APPENDICE : REMARQUES SUPPLÉMENTAIRES, PROBLÈMES ET EXERCICES	539
1. Arithmétique et algèbre, 539. — 2. Géométrie analytique, 540. — 3. Constructions géométriques, 546. — 4. Géométrie projective et non euclidienne, 547. — 5. Topologie, 549. — 6. Fonctions, limites et continuité, 552. — 7. Maxima et minima, 553. — 8. Calcul différentiel et intégral, 555. — 9. Techniques d'intégration, 557.	
SUGGESTIONS DE LECTURE.	563
INDEX.	569