

Table des matières

Introduction	IX
Chapitre 1. Préliminaires	I
1.1. Rappels	I
1.1.1. Notations.	I
1.1.2. Espaces fonctionnels.	2
1.1.3. Le produit de convolution.	3
1.2. Transformation d'intégrales	3
1.3. Un outil essentiel : la transformée de Fourier	8
1.3.1. La représentation de Fourier des fonctions périodiques.	9
1.3.2. La transformée de Fourier.	12
Chapitre 2. Modèles physiques et EDP	19
2.1. Équation de transport	19
2.2. Quelques modèles en électromagnétisme	21
2.3. Équation de la chaleur	23
2.4. Équation de Burgers et lois de conservation	27
2.5. Système d'Euler des gaz compressibles	29
Chapitre 3. Solutions d'EDP classiques	33
3.1. Équation de transport	33
3.1.1. Le cas scalaire à coefficients constants.	33
3.1.2. Le cas de vitesses non constantes.	36
3.1.3. L'équation de transport dans un domaine borné.	39
3.1.4. Équations de transport plus générales.	41
3.2. Équation de Laplace	45
3.2.1. L'équation de Laplace dans un rectangle.	46
3.2.2. L'équation de Laplace sur un disque.	49
3.2.3. Un résultat d'unicité.	53
3.3. Équation des ondes	53
3.3.1. Résolution explicite dans le cas unidimensionnel.	54
3.3.2. Solution en dimensions d'espace supérieures.	59
3.3.3. Un résultat d'unicité.	65
3.4. Équation de la chaleur	65
3.4.1. Solutions dans l'espace entier.	66
3.4.2. Solutions sur un domaine borné.	71

3.4.3. L'équation de la chaleur sur une bande.	74
3.4.4. Le principe du maximum.	76
3.5. Équation de Schrödinger	77
3.5.1. Solutions dans l'espace entier.	77
3.5.2. L'équation de Schrödinger sur un domaine borné.	81
3.6. Équation de Burgers	81
3.6.1. La méthode des caractéristiques.	82
3.6.2. Exemples de résolution.	83
3.6.3. Limitation de la méthode des caractéristiques.	85
3.7. Équations aux dérivées partielles bien posées	87
3.7.1. Équations du premier ordre en temps.	87
3.7.2. Équations du second ordre en temps.	89
Chapitre 4. Schémas aux différences finies pour les EDP	93
4.1. Principe des différences finies	93
4.2. Consistance, ordre de précision et convergence	97
4.3. Stabilité l^2 et analyse de Fourier	98
4.3.1. Le concept de stabilité.	98
4.3.2. Analyse de Fourier pour les suites de l^2	99
4.3.3. Stabilité pour des schémas à un pas.	100
4.3.4. Stabilité pour des schémas multipas.	108
4.3.5. Manifestation numérique de l'instabilité.	109
4.4. Le théorème de Lax-Richtmyer	111
4.4.1. Préliminaires.	111
4.4.2. Le théorème d'équivalence de Lax-Richtmyer.	114
4.4.3. Estimation d'erreur.	118
4.5. Dissipativité d'un schéma aux différences finies	119
4.6. Dispersion d'un schéma aux différences finies	121
4.7. Le problème des conditions aux limites	125
4.8. Différences finies pour l'équation de Laplace	127
4.8.1. Le cas unidimensionnel.	128
4.8.2. Le cas bidimensionnel.	129
4.8.3. Une estimation d'erreur générale.	133
Chapitre 5. Méthodes d'éléments finis pour les EDP	137
5.1. Principe des éléments finis	137
5.2. Le théorème de Lax-Milgram	139
5.3. Distributions	141
5.3.1. Fonctions test.	141
5.3.2. Définition des distributions.	142
5.3.3. Dérivées des distributions.	144

5.4. Espaces de Sobolev	147
5.4.1. L'espace $H^1(\Omega)$	147
5.4.2. L'espace $H_0^1(\Omega)$	153
5.4.3. Espaces $H^m(\Omega)$	155
5.5. Principe des éléments finis	156
5.6. Application à l'équation de Laplace	160
5.6.1. Étude de la formulation variationnelle.	160
5.6.2. En dimension 1 d'espace.	161
5.6.3. En dimension 2 d'espace.	162
5.7. Approximations d'ordre plus élevé	164
5.8. Autres types de conditions aux limites	166
5.9. Estimations d'erreur	169
5.9.1. Une estimation générale.	169
5.9.2. Approximations dans les espaces de Sobolev.	170
5.9.3. Une estimation précisée de l'erreur.	173
5.10. Problèmes non stationnaires	175
Chapitre 6. Volumes finis pour des lois de conservation	179
6.1. Nécessité d'une formulation faible	179
6.2. Solution faible d'une loi de conservation	181
6.3. Le problème de Riemann pour une loi de conservation	186
6.4. La condition d'entropie	188
6.5. Schémas aux volumes finis	191
6.5.1. Le schéma de Godunov.	192
6.5.2. Le schéma de Roe.	192
6.6. Dimensions d'espace supérieures	196
6.7. Un exemple de système hyperbolique	198
Chapitre 7. Méthodes itératives pour les systèmes linéaires	201
7.1. Analyse matricielle	201
7.2. Méthodes itératives	204
7.2.1. Principe général.	204
7.2.2. Analyse de convergence.	205
7.3. Méthodes de gradient	208
7.3.1. La méthode du gradient à pas optimal.	209
7.3.2. La méthode du gradient conjugué.	212
Chapitre 8. Repères historiques	215
Bibliographie	217