

## Table des matières

<i>Pourquoi ce livre ?</i>	13
<i>Introduction</i>	15
<i>Remerciements</i>	21
<b>Première partie. Des programmes issus de l'évolution aux mathématiques, en passant par l'informatique</b>	<b>23</b>
CHAPITRE 1. L'ÉVOLUTION, LE CERVEAU DES ANIMAUX ET LES PROGRAMMES	25
<i>Computo ergo sum</i> . . . . .	25
Mais oui, il y a des programmes dans le cerveau ! . . . . .	26
Pas d'évolution sans programmes . . . . .	30
CHAPITRE 2. LES PROGRAMMES ET L'ORDINATEUR	33
Les programmes . . . . .	33
L'ordinateur dans son environnement de travail . . . . .	36
CHAPITRE 3. LES CODES DU VIVANT ET L'ANALOGIE « HÉRÉTIQUE » CERVEAU-ORDINATEUR	41
Les codes neuronaux et l'exploration du cerveau . . . . .	41
L'analogie entre le cerveau et l'ordinateur est-elle une hérésie ? . . . . .	44
La variabilité dans le cerveau . . . . .	46
CHAPITRE 4. DES MATHÉMATIQUES AUX PROGRAMMES, DES PROGRAMMES AUX MATHÉMATIQUES	49
De quoi sont faites les mathématiques . . . . .	49
Fonctions, programmes, preuves et le principe de la correspondance de Curry-Howard . . . . .	51
Le dictionnaire preuves-programmes . . . . .	54
Un langage précieux pour l'informatique inventé avant la naissance de l'ordinateur . . . . .	55
Le tiers exclu sujet de discordance chez les mathématiciens au xx <sup>e</sup> siècle et l'extension très surprenante de la correspondance preuves-programmes . . . . .	58
L'extension par Krivine de la correspondance preuves-programmes à la théorie des ensembles et la réalisabilité classique . . . . .	60

CHAPITRE 5. UN ENJEU MAJEUR : DÉCRYPTER LES PROGRAMMES ASSOCIÉS AUX MATHÉMATIQUES	63
Travailler en mathématiques à la manière de Champollion ou des hackers . . . . .	63
Les applications aujourd'hui et après-demain : preuves de programmes et programmes pour prouver . . . . .	65
CHAPITRE 6. L'ÉVOLUTION NOUS A FAIT CADEAU DE PROGRAMMES. NOUS LES TRANSFORMONS EN MATHÉMATIQUES DEPUIS QUELQUES MILLIERS D'ANNÉES : POURQUOI ET COMMENT ?	69
La société ÉVOLUTION a oublié de nous donner la notice . . . .	69
À la poursuite des mathématiques . . . . .	70
Il n'y a pas de mathématiques dans le cerveau . . . . .	72
Pourquoi les mathématiques : de la dynamique non appréhendable de l'inconscient à la statique efficace du conscient . . . . .	74
Les mathématiques, traduction sous forme utilisable de certains programmes du cerveau . . . . .	76
CHAPITRE 7. L'INTUITION ET LE RÔLE DES MODÈLES EN LOGIQUE	81
Intuition . . . . .	81
Comment s'écrivent les démonstrations en mathématiques . . . .	83
Modèles et démonstrations . . . . .	83
Intuition, axiomes et programmes . . . . .	85
À quoi sert l'axiomatique . . . . .	88
La place centrale des programmes en logique . . . . .	89
Incomplétude : sécuriser les mathématiques ? . . . . .	91
CHAPITRE 8. LES MATHÉMATIQUES QUI NE SONT PROBABLEMENT PAS DU RESSORT DE L'ÉVOLUTION	93
CHAPITRE 9. ET LA PHYSIQUE DANS L'AFFAIRE ?	97
La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences physiques ? Seulement si on ne tient pas compte de l'évolution !	97
La physique contemporaine et les programmes . . . . .	102
L'Analyse, les approximations discrètes et les mathématiques de la physique . . . . .	104
CHAPITRE 10. MATHÉMATIQUES EN BIOLOGIE : DES QUESTIONS ENCORE TRÈS OUVERTES	107
Existe-t-il des formulations mathématiques de la biologie, des « lois » comme en physique ? . . . . .	107
CHAPITRE 11. LES MATHÉMATIQUES « VUES » PAR LES NEUROBIOLO- GISTES ET LES ANTHROPOLOGUES	111
Neurobiologistes et mathématiques . . . . .	111
Que dit l'imagerie cérébrale sur les mathématiques ? . . . . .	113
Que dit l'anthropologie sur les mathématiques ? . . . . .	115

CHAPITRE 12. COMMENT LES PROGRAMMES DU VIVANT PEUVENT-ILS ÉVOLUER ?	119
Quines . . . . .	119
Quines, cellules et ADN, introns . . . . .	121
CHAPITRE 13. LA MODÉLISATION, PIERRE ANGULAIRE DE L'UTILISATION DES MATHÉMATIQUES	123
Les mathématiques outils . . . . .	123
Modèles mathématiques . . . . .	124
Les mathématiques et les lacunes d'un modèle . . . . .	126
Complexité et modélisation . . . . .	127
La modélisation mathématique, l'informatique et la simulation .	129
Retour sur « mathématiques et programmes du cerveau » en termes de modélisation . . . . .	131
<i>Conclusion de la première partie</i>	133
<b>Deuxième partie. Après les programmes liés à l'environnement physique, ceux de l'apprentissage, liés à l'adaptation des individus à un environnement incertain et changeant</b>	<b>135</b>
CHAPITRE 14. LA STATISTIQUE COMME ILLUSTRATION DES THÈSES SUR LES MATHÉMATIQUES DE LA PREMIÈRE PARTIE	137
Programmes d'apprentissage . . . . .	137
Le comportement animal, l'évolution et l'apprentissage . . . . .	138
Faire de la statistique . . . . .	139
La statistique omniprésente . . . . .	141
Statistique et intelligence artificielle . . . . .	143
CHAPITRE 15. PROGRAMMES, MATHÉMATIQUES, ÉVOLUTION : APPRENTISSAGE PAR RENFORCEMENT	145
Apprentissage et cognition . . . . .	145
Un exemple : l'apprentissage par renforcement . . . . .	147
CHAPITRE 16. L'APPROCHE ENTRÉE-SORTIE DES APPRENTISSAGES	153
Apprentissage supervisé par l'intervention humaine . . . . .	153
Ressemblance . . . . .	154
L'exemple du diagnostic médical . . . . .	156
Un exemple simple de programme d'apprentissage pour le diagnostic médical . . . . .	157
Le cerveau et la supervision . . . . .	159
Sur quelles données peut-on apprendre et comment valider les apprentissages ? . . . . .	161
Machines statistiques et causalité : prévoir et apprendre mais ne pas expliquer ? . . . . .	163

CHAPITRE 17. L'USAGE DES RÈGLES ÉLÉMENTAIRES DE LOGIQUE PAR LE CERVEAU ET EN STATISTIQUE	167
Transposer des règles d'expertise en règles logiques ? . . . . .	167
Règles logiques et apprentissage des concepts . . . . .	167
Machines et apprentissage non supervisé . . . . .	171
CHAPITRE 18. ESTIMER UNE PROBABILITÉ. VRAISEMBLANCE ET PARCI- MONIE	175
Estimer une distribution de probabilité pour le cerveau comme pour la statistique, c'est rendre l'observation aussi banale que possible . . . . .	175
Construire un modèle en statistique . . . . .	177
Prendre en compte la variabilité pour faire de bonnes prévisions	180
Principes de parcimonie et complexité . . . . .	182
Principe de parcimonie pour le cerveau ? . . . . .	184
CHAPITRE 19. PRÉVISION TEMPORELLE : IMITER LE CERVEAU EST INTUITIF ET DIFFICILE	187
Anticiper dans un univers incertain . . . . .	187
Prévision et ressemblance : l'apprentissage supervisé dans sa dimension temporelle . . . . .	189
La contradiction entre le passé, source d'apprentissage, et la nouveau, source de nouvelles incertitudes . . . . .	190
CHAPITRE 20. ÉVÉNEMENTS RARES	193
Le rare et le cerveau . . . . .	193
Le pas de chance, le cerveau et l'échantillonnage . . . . .	195
La pratique des tests statistiques et ce qui lui correspondrait pour le cerveau . . . . .	196
Les risques et les événements extrêmes . . . . .	199
La pratique des risques extrêmes . . . . .	202
Le cerveau et les événements extrêmes . . . . .	206
CHAPITRE 21. LA PERCEPTION ET L'ACTION POUR LE CERVEAU :	
LE PRINCIPE DE L'ÉNERGIE LIBRE MINIMALE	209
Le conditionnement . . . . .	209
Indépendance conditionnelle . . . . .	212
La perception et le traitement des signaux sensoriels par le cerveau	213
Le principe d'homéostasie . . . . .	214
Modèles bayésiens. Hiérarchie des causes . . . . .	215
La psychologie cognitive et les modèles bayésiens . . . . .	217
Le principe de l'énergie libre minimale et le cerveau . . . . .	220
Les programmes associés aux mathématiques du principe de l'énergie libre : introduction à partir des réseaux de neurones artificiels de Helmholtz . . . . .	223
La machine de Helmholtz et l'énergie libre variationnelle . . . . .	225

Le cerveau : énergie libre variationnelle et interprétation de la perception et de l'action . . . . .	229
Préparer, filtrer et comprimer les données : les machines et le cerveau . . . . .	231
Biomimétisme et explications par les réseaux artificiels du fonctionnement du réseau neuronal . . . . .	234
Ces programmes utilisés en sciences de la cognition qui supposent que le cerveau « fabrique du hasard » . . . . .	236
<i>Conclusion de la deuxième partie : à propos de la statistique</i>	239
<i>Conclusion</i>	243
<i>Bibliographie</i>	247