

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1. Intégration	5
1.1. Un calcul d'intégrale	6
1.2. Une inégalité (1)	7
1.3. Une inégalité (2)	7
1.4. Inégalité de Young	8
1.5. Cas d'égalité dans le théorème de majoration	12
1.6. Une inégalité (3)	13
1.7. Inégalité de Van der Corput	15
1.8. Majoration de l'erreur dans la méthode des trapèzes	17
1.9. Méthode des trapèzes pour une fonction convexe	19
1.10. Recherche d'un minimum	21
1.11. Recherche d'une borne inférieure	22
1.12. Inégalité de Hardy	24
1.13. Recherche d'un minimum	25
1.14. Étude d'une suite	26
1.15. Inégalité de Wirtinger	27
1.16. Fonctions dont les deux premiers moments sont nuls	29
1.17. Fonctions dont les n premiers moments sont nuls	30
1.18. Recherche d'orthogonal	31
1.19. Méthode de Gauss	32
1.20. Une somme de Riemann (1)	34
1.21. Une somme de Riemann (2)	35
1.22. Étude asymptotique des sommes de Riemann	36
1.23. Découpage en morceaux de même aire	38
1.24. Estimation d'une suite de coefficients binomiaux	39
1.25. Lemme de Riemann-Lebesgue	41
1.26. Deuxième formule de la moyenne	43
1.27. Suites équiréparties : généralités	45
1.28. Suites équiréparties : critère de Weyl	47
1.29. Suites équiréparties : un exemple	50
1.30. Calcul d'une intégrale	50
1.31. Mesure du domaine d'annulation d'une fonction	51
1.32. Limites de normes intégrales	53
1.33. Équivalent d'une primitive	54
1.34. Recherche de limite	55
1.35. Équivalent des intégrales de Wallis	56

1.36. Recherche d'un équivalent (1)	57
1.37. Recherche d'un équivalent (2)	58
1.38. Recherche d'un équivalent (3)	60
1.39. Développement asymptotique (1)	62
1.40. Développement asymptotique (2)	64
1.41. Méthode de Laplace (1)	66
1.42. Méthode de Laplace (2)	69
1.43. Développement en série entière	73
1.44. Lemme de Gronwall (1)	76
1.45. Lemme de Gronwall (2)	76
1.46. Moyenne spatiale	77
1.47. Une équation intégrale (1)	78
1.48. Une équation intégrale (2)	79
1.49. Une équation intégrale (3)	80
1.50. Une équation intégrale (4)	81
1.51. Indice d'une courbe fermée	83
1.52. Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss	87
Chapitre 2. Suites et séries de fonctions	91
2.1. Majoration sur une demi-droite	92
2.2. Une décomposition en série de la valeur absolue	94
2.3. Fonctions continues presque additives	96
2.4. Contrôle uniforme de séries alternées	97
2.5. Sommation au sens de Riemann	99
2.6. Convergence uniforme des séries de Dirichlet	102
2.7. Convergence d'une série trigonométrique	104
2.8. Étude de la convergence d'une série de fonctions	106
2.9. Suite ne convergeant uniformément sur aucun ouvert	108
2.10. Continuité et convergence de fonctions	110
2.11. Série normalement convergente de somme non dérivable	111
2.12. Régularité d'une série trigonométrique	112
2.13. Série de primitives successives	113
2.14. Équivalent d'une série de fonctions	114
2.15. Courbe de Bolzano	117
2.16. Interversion série-intégrale	121
2.17. Sur le théorème d'intégration d'une série de fonctions	123
2.18. Polynômes de Bernstein	125
2.19. Limites uniformes de polynômes strictement croissants	128
2.20. Un théorème de Walsh	130
2.21. Théorème de Chudnovsky	131
2.22. Algèbre des fonctions presque périodiques	133
2.23. Théorème de Korovkin (1953)	136
2.24. Approximation de Laguerre	138

2.25. Convergence d'une suite de polynômes	140
2.26. Développement eulérien de la cotangente	142
2.27. Produits infinis	146
2.28. Identité de Jacobi	148
2.29. Développement eulérien du sinus sur \mathbb{C}	152
2.30. Théorème de Dini	156
2.31. Un théorème de point fixe	158
2.32. Suite de fonctions lipschitziennes sur un compact	160
2.33. Convergence uniforme de suites de fonctions convexes	161
2.34. Théorème d'Ascoli	163
2.35. Un cas particulier du théorème d'Ascoli	165
2.36. Théorème de sélection de Helly	167
2.37. Suite de fonctions d'un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{C}^0([0, 1])$	167
2.38. Critère de convergence uniforme	170

Chapitre 3. Séries entières**173**

3.1. Rayon de convergence (1)	174
3.2. Rayon de convergence (2)	174
3.3. Rayon de convergence (3)	175
3.4. Rayon de convergence (4)	176
3.5. Étude d'une série entière sur le cercle de convergence	177
3.6. Le théorème d'Abel-Dirichlet	180
3.7. Calcul de la somme d'une série entière	183
3.8. Calcul de la somme de séries de fonctions	184
3.9. Somme d'une série entière extraite	186
3.10. Calcul d'une somme	188
3.11. Calculs de sommes de séries alternées	189
3.12. Développement en série entière des fractions rationnelles	192
3.13. Signe des coefficients d'un développement en série entière	194
3.14. Séries génératrices de deux suites récurrentes	197
3.15. Partitions d'un entier en parts fixées	199
3.16. Série génératrice du nombre de partitions de n	201
3.17. Signe des dérivées successives d'une fonction	203
3.18. Développement en série entière (1)	205
3.19. Développement en série entière (2)	206
3.20. Développement en série entière (3)	208
3.21. Limite simple de polynômes à coefficients positifs	210
3.22. Recherche d'un équivalent	212
3.23. Étude asymptotique au bord du disque de convergence	214
3.24. Un théorème de Gauss	216
3.25. Série de Lambert	219
3.26. Théorèmes taubériens	222

3.27. Condition suffisante d'injectivité d'une série entière	228
3.28. Théorème de Bieberbach dans le cas réel	229
3.29. Série de Laurent à valeurs entières	231
3.30. Caractérisation des fonctions réelles analytiques	233
3.31. Étude d'analyticité	235
3.32. Un théorème de Bernstein	238
3.33. Principe des zéros isolés	239
3.34. Nullité sur un arc du cercle de convergence	240
3.35. Série entière à coefficients entiers, bornée sur son disque de convergence	241
3.36. Fonctions entières de partie réelle bornée	242
3.37. Fonction entière dominée par une exponentielle	244
3.38. Relation entre $\sqrt[n]{ a_n }$ et $\frac{\ln f(z) }{ z }$	245
3.39. Principe du maximum pour une fraction rationnelle	247
3.40. Principe du maximum	249
3.41. Extrema d'une fonction entière	252
3.42. Critère de convergence simple d'une suite de séries entières	254
3.43. Complétude de l'espace des fonctions continues sur \bar{D} , développables en série entière sur D	257
3.44. Logarithme d'une fonction entière qui ne s'annule pas	260
3.45. Un théorème de Fej�r.	262
3.46. Fonction entière telle que $f(2^n) = (-1)^n$	268
Chapitre 4. Séries de Fourier	273
4.1. Calcul d'intégrales	276
4.2. Majoration de la norme de la dérivation	277
4.3. Inégalité de Bernstein (1912)	280
4.4. Fonction 2π -périodique orthogonale aux polynômes trigo- nom�triques de degré $< n$	282
4.5. Une inégalité	283
4.6. Inégalité de Hilbert (1)	284
4.7. Inégalité de Hilbert (2)	285
4.8. Calcul de sommes de séries	288
4.9. Développement eulérien de la fonction cotangente	291
4.10. Développement en série de Fourier (1)	293
4.11. Calcul d'intégrales par développement en série de Fourier . .	295
4.12. Développement en série de Fourier (2)	296
4.13. Calcul de la somme d'une série trigonométrique	299
4.14. Inégalité entre normes	302
4.15. Recherche d'équivalent	303
4.16. Formule sommatoire de Poisson	306
4.17. Un cas particulier de la formule sommatoire de Poisson . . .	308

4.18. Série génératrice des nombres de Bernoulli	310
4.19. Série de Fourier d'une primitive	313
4.20. Inégalité de Wirtinger	315
4.21. Solutions périodiques de $x' = F(x)$	317
4.22. Résolution d'une équation différentielle	321
4.23. Étude de convergence uniforme	325
4.24. Condition suffisante d'analyticité	330
4.25. Le phénomène de Gibbs	331
4.26. Théorème de Weierstrass trigonométrique	334
4.27. Théorème de Jackson (1911)	336
4.28. Un théorème de Bernstein (1912)	340
4.29. Noyau de Poisson	342
4.30. Fonctions à coefficients de Fourier positifs	345
4.31. Théorème de Fej�r (1904)	347
4.32. Complétude pour la norme quadratique	350
4.33. Fonctions dont la série des coefficients de Fourier converge ab- solument	351
4.34. Convergence de la série de Fourier d'une fonction α - höldérienne	354
4.35. Dual topologique	357
4.36. Opérateurs de convolution	359
Table des matières	365
Index	371