

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1. Fonctions de plusieurs variables	5
1.1. Étude de différentiabilité	6
1.2. Différentiabilité du maximum de plusieurs fonctions	7
1.3. Différentiabilité de la distance à un convexe fermé	10
1.4. L'ouvert des matrices cycliques	11
1.5. Rang localement constant	13
1.6. Étude d'une suite récurrente	14
1.7. Contre-exemple de Peano	16
1.8. Fonctions s'écrivant $x \mapsto \langle h(x)x, x \rangle$ avec $h : \mathbb{R}^n \rightarrow S_n(\mathbb{R})$.	18
1.9. Espace des dérivations en 0	19
1.10. Isométries infinitésimales	21
1.11. Jacobienne antisymétrique	22
1.12. Exemple de difféomorphisme (1)	24
1.13. Exemple de difféomorphisme (2)	25
1.14. Perturbation de l'identité	25
1.15. Dilatations de classe \mathcal{C}^1	27
1.16. Racine carrée sur l'ensemble des matrices définies positives	28
1.17. Injectivité locale d'une fonction de classe \mathcal{C}^1	31
1.18. Normales à une hypersurface compacte	32
1.19. Calcul d'un minimum	34
1.20. Existence d'un maximum	38
1.21. Descente de gradient	39
1.22. Gradient bijectif	41
1.23. Fonctions harmoniques (1)	42
1.24. Fonctions harmoniques (2)	43
1.25. Principe du maximum (1)	45
1.26. Principe du maximum (2)	46
1.27. Principe du maximum (3)	47
1.28. Équation de la chaleur sur un anneau	49
1.29. Fonctions harmoniques sur un demi-plan	52
1.30. Une équation aux dérivées partielles (1)	55
1.31. Une équation aux dérivées partielles (2)	57
1.32. Théorème de relèvement	60
1.33. Existence d'un point critique	61
1.34. Intégrale double (1)	63
1.35. Intégrale double (2)	63

1.36. Intégrale double (3)	64
1.37. Intégrale double (4)	65
1.38. Intégrale double (5)	68
1.39. Un opérateur intégral	70
1.40. Comparaison à une intégrale double	72
1.41. Une intégrale multiple	75
Chapitre 2. Équations différentielles linéaires	77
2.1. Étude d'une équation linéaire singulière (1)	77
2.2. Étude d'une équation linéaire singulière (2)	78
2.3. Étude d'une équation linéaire singulière (3)	80
2.4. Étude d'une équation linéaire singulière (4)	82
2.5. Équations du second ordre avec second membre	85
2.6. Utilisation d'un développement en série de Fourier	85
2.7. Une équation aux dérivées partielles	87
2.8. Un problème de Cauchy	90
2.9. Équation $y'' + y = 0$	91
2.10. Déterminant circulant	93
2.11. Équation intégrale (1)	95
2.12. Équation intégrale (2)	96
2.13. Équation différentielle linéaire d'ordre 4	97
2.14. Équation linéaire d'Euler	98
2.15. Équation de Bessel	101
2.16. Solution développable en série entière de $xy'' + y' + y = 0$	104
2.17. Équation singulière avec deux solutions de produit 1	106
2.18. Condition d'existence de deux solutions de produit 1	107
2.19. Condition d'existence de deux solutions telles que $y_2 = xy_1$	108
2.20. Un problème aux limites (1)	110
2.21. Un problème aux limites (2)	111
2.22. Problème de Cauchy asymptotique	112
2.23. Solutions de $y' + ay = b$ de limite nulle en $\pm\infty$	114
2.24. Solutions périodiques de $y' + ay = b$	115
2.25. Solutions bornées de $y'' - a^2y = f$	116
2.26. Limite en $+\infty$ d'une solution de $x'' = qx$	118
2.27. Équation dépendant d'un paramètre	119
2.28. Application du lemme de Gronwall (1)	121
2.29. Application du lemme de Gronwall (2)	122
2.30. Une variante du lemme de Gronwall	123
2.31. Les solutions de $y'' + ty = 0$ sont bornées	124
2.32. Autour du lemme de Gronwall	125
2.33. Théorème de Bôcher	126
2.34. Équation de Mathieu (1)	128
2.35. Équation de Mathieu (2)	129

2.36. Inégalité de Liapounov	132
2.37. Théorème de stabilité de Liapounov	133
2.38. Théorème d'entrelacement de Sturm	135
2.39. Équation $y'' + qy = 0$ avec q strictement négative	136
2.40. Solutions non nulles s'annulant au plus une fois	137
2.41. Équation $y'' + qy = 0$ avec q positive et croissante (1)	138
2.42. Équation $y'' + qy = 0$ avec q positive et croissante (2)	140
2.43. Théorème de Sturm (1836)	142
2.44. Zéros de $x'' + x = \varepsilon(t)x'$: étude asymptotique	144
2.45. Zéros de $y'' + t^{\alpha-2}y = 0$: étude asymptotique	145
2.46. Équation dépendant d'un paramètre	147
2.47. Nombre de zéros au voisinage d'un point	148
2.48. Résolution approchée d'une équation d'ordre 2	149
2.49. Système différentiel du premier ordre à coefficients constants	152
2.50. Résolution d'un système différentiel	153
2.51. Particule dans un champ magnétique	155
2.52. Équation $X' = AX$, avec A antisymétrique	157
2.53. Existence d'une limite en $+\infty$	158
2.54. Majoration des solutions d'un système différentiel (1)	158
2.55. Majoration des solutions d'un système différentiel (2)	159
2.56. Distance entre les solutions de deux systèmes différentiels	161
2.57. Solutions à coordonnées positives	164
2.58. Équation différentielle de Lax (1)	165
2.59. Équation différentielle de Lax (2)	166
2.60. Une identité remarquable	167
2.61. Classification différentielle des flots linéaires	168
2.62. Stabilité d'un système à coefficients constants	170
2.63. Équation singulière d'ordre 1 dans \mathbb{C}^n	172
2.64. Commandabilité	178

Chapitre 3. Équations différentielles non linéaires **181**

3.1. Tangentes aux courbes intégrales	185
3.2. Équation différentielle $y' = x + y^2$	186
3.3. Solution développable en série entière de $xy' = x + y^2$	188
3.4. Solution approchée de $y' = x^2 + y^2$	191
3.5. Recherche de solutions développables en série entière	195
3.6. Équation se ramenant à une équation autonome (1)	197
3.7. Équation se ramenant à une équation autonome (2)	200
3.8. Monotonie des solutions d'une équation autonome	202
3.9. Équation autonome $x' = f(x)$, où f est positive	203
3.10. Équation autonome $x' = g(x)$, où g est négative	205
3.11. Comparaison de solutions d'équations autonomes	207
3.12. Équation $y' = y^4 + g(x)$, où g tend vers 0 en $+\infty$	207

3.13. Étude qualitative d'une solution de $x' = \lambda + \frac{x^2}{1+t^2}$	209
3.14. Étude qualitative des solutions de $y' = \alpha\sqrt{y} - x$	211
3.15. Équation $x' = f(x, t)$ avec f doublement 1-périodique	214
3.16. Équation $y' = f(y, t)$ où f est périodique par rapport à t	216
3.17. Existence d'une solution périodique	218
3.18. Théorème de l'entonnoir	221
3.19. Étude de $x' = \cos x + \cos t$	223
3.20. Étude de $x' = x^2 - t$ (1)	225
3.21. Étude de $x' = x^2 - t$ (2)	226
3.22. Étude de $x' = x^2 - t$ (3)	227
3.23. Étude de $y' = y^2 - t^2$	231
3.24. Étude de $x' = \sin(tx)$	233
3.25. Inégalité différentielle (1)	237
3.26. Inégalité différentielle(2)	238
3.27. Équations différentielles dépendant d'un paramètre	239
3.28. Système différentiel (1)	242
3.29. Système différentiel (2)	244
3.30. Système différentiel (3)	246
3.31. Surjectivité d'une application propre, localement inversible	248
3.32. Système proie-prédateur de Lotka-Volterra	250
3.33. Intervalle de définition d'une solution	253
3.34. Équation différentielle dans \mathbb{R}^3 euclidien (1)	254
3.35. Équation différentielle dans \mathbb{R}^3 euclidien (2)	257
3.36. Équation différentielle $\frac{dM}{dt} = M^2$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	260
3.37. Gradient d'une fonction minorée	261
3.38. Étude des solutions de $x' = \text{grad } f(x)$	262
3.39. Dynamique du gradient (1)	264
3.40. Dynamique du gradient (2)	265
3.41. Théorème de stabilité de Liapounov	267
3.42. Stabilité de la solution nulle d'un système différentiel (1)	269
3.43. Stabilité de la solution nulle d'un système différentiel (2)	274
3.44. Une équation autonome d'ordre 2	276
3.45. Une équation du second ordre	277
3.46. Équation différentielle $\varphi'' = \frac{k}{\sqrt{\varphi}}$	278
3.47. Solution de $u'' + f(u) = 0$ avec $u(-1) = u(1) = 0$	280
3.48. Équation $u'' + u^{2n+1} = u$	280
3.49. Équation $u'' + au' + b \sin u = 0$	283
3.50. Équation du pendule simple	285
3.51. Équation de Van der Pol	289
3.52. Calcul des variations (1)	291
3.53. Calcul des variations (2)	295

3.54. Surface d'aire minimale	297
3.55. Fonctions telles que $f' = f^{-1}$	302

Chapitre 4. Courbes **305**

4.1. Intersection d'un plan et d'un cylindre	306
4.2. Courbe de poursuite ou courbe du chien	306
4.3. Points coplanaires ou alignés sur une courbe	308
4.4. Points alignés sur une courbe	310
4.5. Points multiples	312
4.6. Courbes telles que $d(M(t_1), M(t_2))$ ne dépende que de $ t_1 - t_2 $	314
4.7. Minimisation d'une aire	317
4.8. Chemin le plus court (1)	318
4.9. Chemin le plus court (2)	320
4.10. Chemin au-dessus d'une courbe concave	322
4.11. Inégalité isopérimétrique	324
4.12. Distance d'un point du plan à une courbe	326
4.13. Aire d'un triangle	327
4.14. Centre de courbure sur une hyperbole équilatère	328
4.15. Ovale de largeur constante	330
4.16. Points associés sur un arc régulier sans point double	332
4.17. Théorème des quatre sommets	335
4.18. Courbure affine	336

Table des matières **339**

Index **345**