

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1. Espaces euclidiens. Espaces hermitiens	5
1.1. Bornes d'une fonction où intervient le produit scalaire	5
1.2. Boule contenant n points à distances mutuelles supérieures à 2	7
1.3. Familles obtusangles	8
1.4. Caractérisation des normes euclidiennes	10
1.5. Norme d'un endomorphisme symétrique	13
1.6. Fonctions additives sur deux vecteurs orthogonaux	15
1.7. Applications de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{R} additives sur les vecteurs orthogonaux	18
1.8. Forme linéaire sur un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$	20
1.9. Caractérisation des projecteurs orthogonaux (1)	21
1.10. Caractérisation des projecteurs orthogonaux (2)	22
1.11. Norme des projetés d'une base orthonormale	23
1.12. Pseudo-inverse	25
1.13. Condition pour que deux projecteurs orthogonaux commutent	26
1.14. Composition de projecteurs orthogonaux	27
1.15. Contraction d'un espace euclidien	28
1.16. Distance à un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$	30
1.17. Norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	31
1.18. Distance d'une matrice à l'espace des matrices symétriques	33
1.19. Problèmes de minimisation dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$	34
1.20. Simplexes réguliers	37
1.21. Décomposition QR et inégalité d'Hadamard	40
1.22. Base orthonormale dans $\mathbb{R}[X]$	42
1.23. Polynômes de Laguerre	45
1.24. Polynômes d'Hermite	48
1.25. Méthode de Gauss	51
1.26. Matrices de Gram	53
1.27. Familles équiangulaires	55
1.28. Familles isométriques	56
1.29. Image d'une base orthonormée par un projecteur orthogonal	57
1.30. Une matrice orthogonale	58
1.31. Convergence en moyenne des puissances d'une matrice orthogonale	59
1.32. Orbites sous l'action d'un endomorphisme orthogonal	60
1.33. Générateurs de $O(E)$	61
1.34. Théorème de Maschke (1898)	62

1.35. Réduction des matrices orthogonales	63
1.36. Exponentielle de matrices antisymétriques réelles	65
1.37. Simplicité de SO_3	67
1.38. Polynômes de quatre variables invariants sous l'action de $O_2(\mathbb{R})$	70
1.39. Équation fonctionnelle faisant intervenir le groupe orthogonal	72
1.40. Endomorphismes conservant le produit vectoriel	73
1.41. Le groupe des quaternions	74
1.42. Une équation fonctionnelle	76
1.43. Projection sur un convexe fermé	78
1.44. Lemme de Farkas	80
1.45. Éléments de \mathbb{R}^n à composantes positives	82
1.46. Inégalités	84
1.47. Étude de normes sur $\mathcal{L}(E)$ où E est hermitien	86
1.48. Condition suffisante pour que deux matrices unitaires com- mutent	89
Chapitre 2. Réduction des endomorphismes auto-adjoints	91
2.1. Codiagonalisation	92
2.2. Puissances d'une matrice symétrique	92
2.3. Méthode itérative pour une équation linéaire	93
2.4. Décomposition en somme de droites et plans stables	95
2.5. Spectre de la différence de deux projecteurs orthogonaux . .	95
2.6. Produit de deux projecteurs orthogonaux	96
2.7. Frame d'un espace euclidien	97
2.8. Matrices à termes diagonaux égaux	99
2.9. Caractérisation des matrices positives avec la trace	101
2.10. Étude d'un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	102
2.11. Caractérisation des symétries orthogonales	105
2.12. Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif . .	107
2.13. Produit de deux matrices symétriques positives	108
2.14. Condition de diagonalisabilité d'une matrice réelle	109
2.15. Condition d'existence de m vecteurs propres indépendants .	110
2.16. Une équation matricielle	111
2.17. Équation dans $\mathcal{L}(E)$	112
2.18. Caractérisation de Sylvester des matrices définies positives	114
2.19. Caractérisation des matrices positives	116
2.20. Matrice symétrique de taille 2 à coefficients positifs	117
2.21. Théorème de Perron-Frobenius pour les matrices symétriques	118
2.22. Théorème de Suleimanova (1949)	119
2.23. Matrice de passage à coefficients positifs	121
2.24. Décomposition en valeurs singulières	123
2.25. Dilatation isométrique d'une contraction	125

2.26. Décomposition polaire (1)	126
2.27. Décomposition polaire (2)	128
2.28. Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$	130
2.29. Décomposition de Choleski. Décomposition QR	131
2.30. Inégalité d'Hadarnard	133
2.31. Inégalité de Fischer	134
2.32. Recherche d'un minimum	136
2.33. Image de S^2 par une fonction, où S est la boule unité	137
2.34. Majoration et minoration d'une fonction	138
2.35. Inégalité de Kantorovich	139
2.36. Inégalité de convexité	141
2.37. Théorème du minimax	142
2.38. Théorème d'entrelacement de Cauchy	144
2.39. Une réciproque au théorème d'entrelacement de Cauchy	146
2.40. Théorème de perturbation de Weyl	147
2.41. Théorème de majoration de Schur	148
2.42. Inégalités de Ky-Fan	150
2.43. Majoration de $\text{Tr}(AB)$	152
2.44. Écart maximal entre deux valeurs propres	153
2.45. Valeurs propres d'endomorphismes dont la somme est positive	154
2.46. Étude de $\text{Tr}(AB - BA)^4$, pour A et B antisymétriques	156
2.47. Parité du rang d'un endomorphisme antisymétrique	156
2.48. Endomorphismes antisymétriques en dimension 3	157
2.49. Carré d'une matrice antisymétrique	158
2.50. Réduction des endomorphismes antisymétriques	159
2.51. Matrices strictement positives	161
2.52. Théorème de Liapounov	162
2.53. Condition pour que $\text{Im } B \subset \text{Im } A$	164
2.54. Application convexe	167
2.55. Condition pour qu'une matrice hermitienne soit définie positive	168
2.56. Calcul de l'inverse d'une matrice par une méthode itérative	169
2.57. Encadrement des valeurs propres de AB	170
2.58. Inégalité d'Hadarnard pour une matrice hermitienne	171
2.59. Produit de matrices hermitiennes positives	173
2.60. Produit de Schur de deux matrices hermitiennes positives	175
2.61. Inégalités	176
2.62. Décomposition polaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	177
2.63. Écriture d'un endomorphisme comme combinaison linéaire d'endomorphismes unitaires	179
2.64. Matrices normales	181
2.65. Théorème de Mirman (1968)	182
2.66. Matrices unitairement congruentes à une matrice triangulaire	185

Chapitre 3. Formes quadratiques	189
3.1. Formes bilinéaires réflexives	189
3.2. Caractérisation des applications bilinéaires symétriques ou antisymétriques	190
3.3. Base formée de vecteurs isotropes	191
3.4. Formes quadratiques ayant même cône isotrope	192
3.5. Composantes connexes par arcs	193
3.6. Théorème de Pfister (1965)	195
3.7. Indice d'une forme quadratique	197
3.8. Famille de formes quadratiques	199
3.9. Théorème de Fischer-Cochran	200
3.10. Une forme quadratique définie positive	201
3.11. Une forme quadratique positive	202
3.12. Une forme quadratique définie négative	203
3.13. Matrices symétriques à diagonale positive	203
3.14. Restriction à un plan définie positive	205
3.15. Caractérisation de Sylvester des matrices définies positives	206
3.16. Comparaison de noyaux	207
3.17. Une forme quadratique positive	208
3.18. Condition pour qu'une matrice soit positive	208
3.19. Inégalité de Bergström	209
3.20. Convergence d'une suite croissante et majorée	211
3.21. Décroissance de la fonction inverse	211
3.22. Signature d'une forme quadratique réelle	213
3.23. Composantes connexes	214
3.24. Un calcul de signature (1)	216
3.25. Un calcul de signature (2)	216
3.26. Un calcul de signature (3)	217
3.27. Formes quadratiques sur un corps fini	217
3.28. Matrices symétriques positives telles que $A \leq B$	220
3.29. Inégalité sur le déterminant de matrices symétriques	220
3.30. Comparaison d'endomorphismes symétriques définis positifs	221
3.31. Convexité logarithmique	222
3.32. Inégalité de Minkowski	223
3.33. Inégalité sur le déterminant de matrices symétriques	224
3.34. Diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques	225
3.35. Commutant du groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée	226
3.36. Minimalité du groupe orthogonal d'une forme non dégénérée	228
3.37. Ellipsoïde de John-Loewner	229
3.38. Sous-groupes compacts maximaux de $GL(E)$	231
3.39. Endomorphisme auto-adjoint sur un espace quadratique complexe	232

3.40. Réduction des matrices symétriques complexes	233
3.41. Une décomposition	235
3.42. Maximum d'une forme quadratique sur un compact	238
3.43. Forme quadratique et réseau	239
3.44. Lemme de Davenport-Cassels	241
3.45. Image d'un cône	242
Chapitre 4. Géométrie affine et euclidienne	245
4.1. Partage équitable	245
4.2. Théorème de Pappus	246
4.3. Théorème de Ménélaüs	248
4.4. Quadrilatère complet	249
4.5. Théorème de Sylvester-Gallai	251
4.6. Aire d'un triangle	252
4.7. Point de Gergonne	254
4.8. Quadrilatère formé par les sommets et l'orthocentre d'un tri- angle	255
4.9. Caractérisation des triangles équilatéraux	256
4.10. Un triangle équilatéral	256
4.11. Théorème de Ptolémée	258
4.12. Puissance d'un point par rapport à un cercle	258
4.13. Suite de cercles	260
4.14. Condition de cocyclicité de quatre points	260
4.15. Problème angulaire	262
4.16. Intersection de deux disques	264
4.17. Ellipses semblables	265
4.18. Rayon de courbure d'une ellipse	266
4.19. Cercles tangents à une ellipse	268
4.20. Triangles d'aire maximale inscrits dans une ellipse	271
4.21. Rectangles d'aire maximale inscrits dans une ellipse	273
4.22. Problème de Pappus	274
4.23. Cocyclicité de quatre points d'une ellipse	275
4.24. Cercle orthoptique d'une ellipse	276
4.25. Sphère orthoptique d'un ellipsoïde	278
4.26. Centres des cercles circonscrits à une famille de triangles ins- crits dans une parabole	280
4.27. Centres des triangles équilatéraux inscrits dans une parabole	281
4.28. Points équidistants de deux droites non coplanaires	283
4.29. Diamètre transfini	284
4.30. Deux problèmes d'extrema	286
4.31. Problème d'extremum	289
4.32. Triangle de périmètre minimal inscrit dans un triangle	291
4.33. Billard convexe compact	293

4.34. Problème de Fermat	295
4.35. Polygone dont les milieux des côtés sont donnés	299
4.36. Triangles à côtés parallèles	300
4.37. Équivalence entre parties de \mathbb{R}^2	302
4.38. Étude d'une suite d'applications affines	304
4.39. Applications du plan conservant l'orthogonalité	305
4.40. Sous-groupes finis du groupe affine réel	309
4.41. Une partie bornée de \mathbb{R}^2 n'est pas dédoublable	309
4.42. Application conservant la distance unité	310
4.43. Groupe des isométries du simplexe régulier	313
4.44. Théorème de Carathéodory (1907)	316
4.45. Théorème de Jung (1901)	317
4.46. Points extrémaux d'un ensemble convexe	320
4.47. Rectangle circonscrit à un convexe compact	322
4.48. Théorème de Pick (1899)	326
4.49. Droites à une distance strictement positive de \mathbb{Z}^2	328
4.50. Polygone ayant trois sommets à coordonnées entières	329
4.51. Recouvrement par des droites	331
4.52. Rotations de \mathbb{R}^3 laissant un réseau invariant	333
4.53. Un problème de Pólya (1918)	334
4.54. Théorème de Minkowski	336
4.55. Formule d'Euler	338
4.56. Rectangles semi-entiers	340
4.57. Pavage d'un rectangle par des carrés	341
Index	351