

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1. Espaces vectoriels normés	5
1.1. Sur l'inégalité triangulaire	6
1.2. Description géométrique des normes	8
1.3. Une inégalité	9
1.4. Recherche d'un minimum	10
1.5. Normes absolues	11
1.6. Espace normé réel vs espace normé complexe	14
1.7. Une fonction lipschitzienne	15
1.8. Caractérisation des normes euclidiennes	17
1.9. Orthogonalité généralisée	18
1.10. Prolongement d'une norme définie sur \mathbb{Z}^2	19
1.11. Semi-normes invariantes par similitude	21
1.12. Norme infinie vs norme de la convergence en moyenne quadra- tique	22
1.13. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire	24
1.14. Sous-espaces fermés	26
1.15. Fonctions injectives, surjectives, bijectives	27
1.16. Adhérence de l'ensemble des polynômes simplement scindés de $\mathbb{R}_n[X]$	28
1.17. Théorème de Cantor-Bendixson	30
1.18. Choix de la limite d'une suite	32
1.19. Étude de continuité (1)	33
1.20. Étude de continuité (2)	34
1.21. Étude de continuité (3)	34
1.22. Continuité de la composition	35
1.23. Prolongement par continuité	36
1.24. Théorème de prolongement de Tietze	37
1.25. Fonctions convexes	39
1.26. Rétraction du disque unité sur une partie du cercle	41
1.27. Caractérisation des formes linéaires continues	44
1.28. Norme d'une forme linéaire continue	45
1.29. Normes sur $\mathbb{R}[X]$	47
1.30. Continuité d'une forme linéaire	48
1.31. Calcul d'une norme triple	49
1.32. Étude de continuité	50

1.33. Crochet de Lie (1)	51
1.34. Crochet de Lie (2)	52
1.35. Conditionnement d'un système linéaire	55
1.36. Inégalité entre le rayon spectral et la triple norme	57
1.37. Vers le théorème de l'application ouverte	58
1.38. Théorème de l'application ouverte en dimension finie	59
1.39. Automorphismes unitaires de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$	60
1.40. Endomorphismes qui commutent avec la dérivation	60
1.41. Théorème de Hahn-Banach en dimension finie	63
Chapitre 2. Compacité, convexité, connexité	65
2.1. Théorème de Riesz	65
2.2. Quasi-isométrie	66
2.3. Dilatations d'un compact	68
2.4. Surjection 1-lipschitzienne d'un compact	70
2.5. Un théorème de point fixe	70
2.6. Suite ayant deux valeurs d'adhérence	71
2.7. Endomorphismes stabilisant un compact	73
2.8. Suite croissante de fonctions continues	74
2.9. Théorème de Gottschalk et Hedlung (1955)	76
2.10. Compacité et précompacité	79
2.11. Isométries d'un compact	81
2.12. Recouvrement minimal	82
2.13. Enveloppe convexe fermée et précompacité	83
2.14. Mesure de compacité, deux exemples	85
2.15. Graphe d'une fonction höldérienne	89
2.16. Courbe de Peano-Hilbert	90
2.17. Propriété de Borel-Lebesgue	95
2.18. Un convexe non borné contient une demi-droite	96
2.19. Segment intérieur à un convexe	97
2.20. Partie convexe dense	98
2.21. Hyperplan d'appui	99
2.22. Théorème de Krein-Milman	101
2.23. Diamètres d'un convexe compact plan	102
2.24. Formule de Steiner-Minkowski en dimension 2	106
2.25. Théorème de Kakutani	109
2.26. Application 1-lipschitzienne dans un compact convexe	110
2.27. Existence d'un extremum	113
2.28. Complémentaire d'un hyperplan	113
2.29. Complémentaire d'un compact	114
2.30. Ensembles de Julia	115
2.31. Injection continue	117
2.32. Distance à la frontière	118

2.33. Dénombrément	119
2.34. Connexité d'un cône	121

Chapitre 3. Espaces de Banach, espaces de Hilbert **123**

3.1. Espace des fonctions continues sur un segment	123
3.2. Espace des suites bornées	125
3.3. Espace $\ell^1(\mathbb{N})$	126
3.4. Espace des polynômes	129
3.5. Espace des fonctions lipschitziennes	131
3.6. Convergence compacte	133
3.7. Une caractérisation des boules ouvertes d'un Banach	135
3.8. Prolongement des applications uniformément continues	137
3.9. Espaces de Banach uniformément convexes	138
3.10. Espaces de Banach séparables	141
3.11. Spectre d'un élément d'une algèbre de Banach complexe	143
3.12. Le théorème de Baire	146
3.13. Théorème de Banach-Steinhaus	148
3.14. Le lemme de Croft	148
3.15. Supplémentaire commun	149
3.16. Convergence uniforme	150
3.17. Projection sur un convexe fermé	152
3.18. Espace ℓ^2	154
3.19. Racine carrée d'un opérateur strictement accréitif	159
3.20. Compacité faible de la boule unité d'un espace de Hilbert	161
3.21. Parties faiblement bornées	164
3.22. Suite proche d'une suite totale	167
3.23. Condition suffisante pour avoir un inverse continu	169
3.24. Endomorphismes inversibles à gauche dans un espace de Hilbert	170

Chapitre 4. Intégrales généralisées **175**

4.1. Existence d'une intégrale	176
4.2. Domaine de convergence d'une transformée de Laplace	177
4.3. Question d'intégrabilité (1)	178
4.4. Question d'intégrabilité (2)	180
4.5. Fonction intégrable monotone	182
4.6. Limite en $+\infty$ d'une fonction intégrable (1)	182
4.7. Limite en $+\infty$ d'une fonction intégrable (2)	184
4.8. Limite en $+\infty$ d'une fonction intégrable (3)	185
4.9. Sur l'intégrabilité d'un produit	186
4.10. Calcul d'intégrales (1)	188
4.11. Calcul d'intégrale (2)	190
4.12. Calcul d'intégrale (3)	192

4.13. Calcul d'intégrale (4)	192
4.14. Calcul d'intégrale (5)	194
4.15. Calcul d'intégrale (6)	194
4.16. Calcul d'intégrale (7)	195
4.17. Formule des résidus pour les fractions rationnelles	197
4.18. Inégalité de Hardy	198
4.19. Inégalité de Hölder, inégalité de Minkowski	200
4.20. Inégalité de Kolmogorov	202
4.21. Inégalité de Weyl	204
4.22. Une inégalité intégrale	205
4.23. Majoration du reste	207
4.24. Formule de Stirling	208
4.25. Interversion série-intégrale	212
4.26. Sur la convergence L^1	212
4.27. Calcul de l'intégrale de Dirichlet (1)	214
4.28. Calcul de l'intégrale de Dirichlet (2)	217
4.29. Intégrale de Gauss	220
4.30. Intégrale de Fresnel (1)	221
4.31. Intégrale de Fresnel (2)	223
4.32. Intégrale à paramètre (1)	228
4.33. Intégrale à paramètre (2)	230
4.34. Intégrale à paramètre (3)	233
4.35. Intégrale à paramètre (4)	234
4.36. Intégrale à paramètre (5)	236
4.37. Intégrale à paramètre (6)	238
4.38. Inversion de Fourier	240
4.39. Développement en série d'une transformée de Laplace bi- latérale	244
4.40. Comparaison d'intégrales (1)	246
4.41. Comparaison d'intégrales (2)	247
4.42. Comparaison d'intégrales (3)	249
4.43. Calculs de limites	252
4.44. Étude d'une intégrale indéfinie	254
4.45. Série asymptotique (1)	255
4.46. Série asymptotique (2)	257
4.47. Polynômes de Legendre	258
4.48. Fonction maximale de Littlewood	261
4.49. Calcul des variations	264