

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>Plan de la collection</b>	<b>9</b>
<b>1. Matrices</b>	<b>11</b>
1.1. Sous-espace engendré par les matrices nilpotentes . . . . .	12
1.2. Droite affine de matrices nilpotentes . . . . .	13
1.3. Nombre de produits distincts . . . . .	13
1.4. Matrices de permutation . . . . .	15
1.5. Puissances en nombre fini . . . . .	16
1.6. Sous-espaces stables par les matrices de permutation . . . . .	17
1.7. Matrices d’Hadamard . . . . .	17
1.8. Sommes de deux matrices inversibles . . . . .	19
1.9. Factorisation d’une matrice inversible . . . . .	20
1.10. Opérateur Sweep . . . . .	21
1.11. Image et noyau supplémentaires . . . . .	23
1.12. Fonctions vérifiant $f(XY) \leq \min(f(X), f(Y))$ . . . . .	24
1.13. Rang et projecteurs . . . . .	25
1.14. Morphismes d’algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{L}(V)$ . . . . .	26
1.15. Inégalité entre deux rangs . . . . .	27
1.16. Matrices de rang 1 . . . . .	27
1.17. Partie symétrique non inversible . . . . .	28
1.18. Généralisation de l’inégalité de Sylvester . . . . .	28
1.19. Rang et corps de base . . . . .	29
1.20. Minoration du rang . . . . .	30
1.21. Condition pour que $\text{rg } g \leq \text{rg } f$ . . . . .	31
1.22. Égalité matricielle . . . . .	31
1.23. Factorisation bilatère . . . . .	32
1.24. Équivalence avec la transposée . . . . .	33
* 1.25. Équivalence entre $\text{Ker } u \cap \text{Ker } v = \{0\}$ et $\text{Im } u + \text{Im } v = E$ . . . . .	33
1.26. Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stabilisant le groupe linéaire . . . . .	35
* 1.27. Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ conservant le rang . . . . .	36
1.28. Équation matricielle $X + X^T = (\text{Tr } X)A$ . . . . .	40
1.29. Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . . . . .	41
1.30. Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ . . . . .	42
1.31. Sous-espaces de matrices de rang $\leq p$ . . . . .	43
1.32. Groupe orthogonal de la forme bilinéaire $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$ . . . . .	46
1.33. Crochets de Lie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . . . . .	48
1.34. Similitude de matrices nilpotentes . . . . .	49
1.35. Diagonales possibles dans une classe de similitude . . . . .	50

1.36. Théorème de Brauer sur les matrices de permutations . . . . .	52
1.37. Similitude et extension de corps . . . . .	54
1.38. Traces modulo $p$ . . . . .	55
1.39. Matrices monotones . . . . .	58
1.40. Puissances d'une matrice strictement stochastique . . . . .	60
1.41. Théorème de Frobenius-König (1912-1916) . . . . .	62
1.42. Majoration du permanent d'une matrice binaire . . . . .	63
*1.43. Décomposition de Bruhat et drapeaux . . . . .	65
1.44. Bases d'un groupe abélien . . . . .	68
1.45. Première colonne d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . . . . .	70
*1.46. Matrices équivalentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . . . . .	72
*1.47. Structure des groupes abéliens finis . . . . .	75
1.48. Lemme de Siegel . . . . .	77

## 2. Formes multilinéaires et déterminants 79

2.1. Utilisation du théorème fondamental (1) . . . . .	79
2.2. Utilisation du théorème fondamental (2) . . . . .	81
2.3. Dimension de l'espace des formes $n$ -linéaires alternées . . . . .	82
2.4. Formes $n$ -linéaires alternées . . . . .	83
2.5. Fonctions multiplicatives et inversibilité . . . . .	85
2.6. Positivité d'un déterminant . . . . .	87
2.7. Borne supérieure du déterminant sur une boule unité . . . . .	88
2.8. Cas d'additivité du déterminant . . . . .	89
2.9. Coefficients du polynôme caractéristique . . . . .	89
2.10. Calcul d'un déterminant (1) . . . . .	90
2.11. Calcul d'un déterminant (2) . . . . .	91
2.12. Calcul d'un déterminant (3) . . . . .	92
2.13. Calcul d'un déterminant (4) . . . . .	93
2.14. Calcul d'un déterminant (5) . . . . .	95
2.15. Déterminant de Vandermonde . . . . .	96
2.16. Calcul explicite d'un déterminant de Vandermonde . . . . .	97
2.17. Matrice de Vandermonde incomplète . . . . .	98
2.18. Vandermonde généralisé (1) . . . . .	99
2.19. Vandermonde généralisé (2) . . . . .	100
2.20. Application du déterminant de Vandermonde (1) . . . . .	101
2.21. Application du déterminant de Vandermonde (2) . . . . .	103
2.22. Application du déterminant de Vandermonde (3) . . . . .	103
2.23. Application du déterminant de Vandermonde (4) . . . . .	106
2.24. Discriminant . . . . .	107
2.25. Déterminant de Cauchy . . . . .	110
2.26. Déterminant de Hurwitz . . . . .	113
2.27. Application des formules de Cramer (1) . . . . .	115
2.28. Application des formules de Cramer (2) . . . . .	116
2.29. Degré et valuation du polynôme $\det(A + XB)$ . . . . .	118
2.30. Utilisation du polynôme $\det(A + XB)$ . . . . .	118
2.31. Caractérisation de $\det(A + XB) = 0$ . . . . .	119
2.32. Espace de dimension finie engendré par les translatées . . . . .	120

2.33. Liberté d'une famille de fonctions . . . . .	122
2.34. Majoration du déterminant d'une matrice stochastique . . . . .	125
2.35. Calcul d'une trace . . . . .	127
2.36. La transposée de la comatrice de A est un polynôme en A . . . . .	128
2.37. Expression de la transposée de la comatrice de $XI_n - A$ . . . . .	130
2.38. Comatrice d'un produit . . . . .	131
2.39. Exemple de matrice de Toeplitz . . . . .	132
* 2.40. Déterminant de Hankel . . . . .	134
2.41. Formule de Cauchy-Binet . . . . .	137
2.42. Déterminant d'une matrice par blocs (1) . . . . .	138
2.43. Déterminant d'une matrice par blocs (2) . . . . .	139
2.44. Déterminant d'une matrice par blocs (3) . . . . .	140
2.45. Déterminant d'une matrice par blocs (4) . . . . .	141
2.46. Formule de Williamson . . . . .	143
* 2.47. Positivité de $\det(I_n + \overline{C})$ . . . . .	144
2.48. Déterminant d'un automorphisme intérieur . . . . .	146
2.49. Décomposition LU avec pivot de Gauss . . . . .	148
2.50. Décomposition LU d'une matrice tridiagonale . . . . .	151
2.51. Déterminant d'une matrice d'incidence . . . . .	155
2.52. Dérangements pairs et impairs . . . . .	156
2.53. Déterminant de Smith (1875) . . . . .	157
2.54. Première colonne d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . . . . .	158
2.55. Opération de $GL_n(\mathbb{Z})$ sur le réseau $\mathbb{Z}^n$ . . . . .	159
2.56. Un problème de poids . . . . .	160
2.57. Matrices de permutation . . . . .	161
2.58. Matrice circulante . . . . .	163
* 2.59. Déterminant sur un anneau quelconque . . . . .	165

### 3. Diagonalisation

169

3.1. Éléments propres d'un opérateur intégral . . . . .	170
3.2. Endomorphisme d'un espace de suites (1) . . . . .	171
3.3. Endomorphisme d'un espace de suites (2) . . . . .	172
3.4. Caractérisation d'une homothétie . . . . .	174
3.5. Détermination de spectre . . . . .	175
3.6. Valeur propre simple . . . . .	176
3.7. Existence d'une valeur propre double . . . . .	177
3.8. Éléments propres de la comatrice . . . . .	177
3.9. Matrices nilpotentes et polynômes caractéristiques . . . . .	178
3.10. Équation avec un crochet de Lie . . . . .	179
3.11. Coefficients du polynôme caractéristique . . . . .	180
3.12. Algorithme de Faddeev . . . . .	181
* 3.13. Fonctions polynomiales $\Phi$ vérifiant $\Phi(AB) = \Phi(BA)$ . . . . .	183
* 3.14. Spectre de la somme de deux matrices (1) . . . . .	185
* 3.15. Spectre de la somme de deux matrices (2) . . . . .	186
3.16. Matrices de Bourdaud . . . . .	188
3.17. Lemme d'Hadamard, disques de Gershgorin . . . . .	189
3.18. Matrices stochastiques (1) . . . . .	191

3.19. Matrices stochastiques (2) . . . . .	192
3.20. Matrices stochastiques (3) . . . . .	193
3.21. Matrices stochastiques (4) . . . . .	194
3.22. Suites de polygones . . . . .	195
3.23. Théorème de Perron-Frobenius (1907) . . . . .	198
3.24. Diagonalisabilité d'une matrice (1) . . . . .	201
3.25. Diagonalisabilité d'une matrice (2) . . . . .	202
3.26. Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . . . . .	202
3.27. Diagonalisabilité de l'application adjointe . . . . .	203
3.28. Diagonalisabilité d'un produit de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . . . . .	205
3.29. Diagonalisabilité d'une matrice tridiagonale . . . . .	207
3.30. Produit à gauche par une matrice inversible . . . . .	208
3.31. Diagonalisabilité des matrices de permutation . . . . .	209
3.32. Matrices à coefficients entiers . . . . .	210
3.33. Caractérisation des polynômes réels sans racine réelle . . . . .	210
3.34. Racine d'une matrice diagonalisable inversible . . . . .	211
3.35. Diagonalisabilité de $f$ dans le cas $f^2$ diagonalisable . . . . .	211
3.36. Recherche de racines carrées . . . . .	213
3.37. Équation du second degré matricielle . . . . .	214
3.38. Puissances diagonalisables . . . . .	214
3.39. Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable . . . . .	215
3.40. Endomorphismes semi-simples à polynôme caractéristique scindé . . . . .	216
3.41. Commutant d'une matrice diagonalisable . . . . .	216
3.42. Diagonalisation simultanée (1) . . . . .	218
3.43. Diagonalisation simultanée (2) . . . . .	219
3.44. Droite affine de matrices diagonalisables . . . . .	220
3.45. Sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de matrices diagonalisables . . . . .	221
3.46. Théorème de Hoffman et Singleton (1960) . . . . .	221
3.47. Calcul de la trace de deux matrices . . . . .	224
3.48. Matrices circulantes (1) . . . . .	225
3.49. Matrices circulantes (2) . . . . .	227
* 3.50. Vecteur propre commun à une famille de matrices . . . . .	228
* 3.51. Condition pour que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ aient un vecteur propre commun . . . . .	230
3.52. Équation de Sylvester (1) . . . . .	232
3.53. Équation de Sylvester (2) . . . . .	233
3.54. Équation de Sylvester (3) . . . . .	235
3.55. Matrices bien posées . . . . .	237
3.56. Une équation matricielle . . . . .	238
* 3.57. Équation matricielle faisant intervenir la comatrice . . . . .	239
3.58. Diagonalisabilité d'une matrice par blocs (1) . . . . .	241
3.59. Diagonalisabilité d'une matrice par blocs (2) . . . . .	242
3.60. Diagonalisabilité d'un produit tensoriel de matrices (1) . . . . .	243
3.61. Diagonalisabilité d'un produit tensoriel de matrices (2) . . . . .	244

**4. Trigonalisation****247**

4.1. Existence d'un polynôme annulateur . . . . .	247
4.2. Noyaux et images de polynômes d'endomorphismes (1) . . . . .	248
4.3. Noyaux et images de polynômes d'endomorphismes (2) . . . . .	249
4.4. Polynôme en $A$ nul ou inversible . . . . .	251
4.5. Degré du polynôme minimal . . . . .	252
4.6. Matrices de polynôme minimal donné . . . . .	252
4.7. Invariance du polynôme minimal par extension de corps . . . . .	253
* 4.8. Une expression du polynôme minimal . . . . .	255
4.9. Matrice non trigonalisable de $M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ . . . . .	256
4.10. Spectre de la comatrice . . . . .	257
4.11. Endomorphismes ayant même sous-espaces stables . . . . .	258
4.12. Calcul d'une racine carrée de matrice . . . . .	259
4.13. Matrices possédant une racine carrée . . . . .	259
4.14. Matrices possédant une racine cubique . . . . .	260
4.15. Polynôme caractérisant les matrices à déterminant strictement positif . . . . .	263
4.16. Caractérisation des matrices nilpotentes avec la trace . . . . .	264
4.17. Théorème de Kronecker . . . . .	266
4.18. Commutant d'une matrice carrée de taille 2 . . . . .	267
4.19. Sous-espace engendré par un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ . . . . .	268
4.20. $\mathfrak{sl}_2$ -triplets . . . . .	269
4.21. Trigonalisation simultanée (1) . . . . .	270
4.22. Trigonalisation simultanée (2) . . . . .	271
4.23. Trigonalisation simultanée (3) . . . . .	272
4.24. Trigonalisation simultanée (4) . . . . .	273
4.25. Trigonalisation simultanée (5) . . . . .	275
* 4.26. Vecteur propre commun à des endomorphismes nilpotents . . . . .	276
* 4.27. Théorème de Lie-Kolchin (1948) . . . . .	279
4.28. Étude d'un opérateur d'un espace de suites (1) . . . . .	282
4.29. Étude d'un opérateur d'un espace de suites (2) . . . . .	283
4.30. Étude d'un opérateur d'un espace de suites (3) . . . . .	285
4.31. Ordre d'une valeur propre dans le polynôme minimal . . . . .	288
4.32. Méthode itérative de détermination de valeurs propres . . . . .	289
* 4.33. Familles de matrices libres et commutatives . . . . .	292
* 4.34. Familles de matrices anticommutantes . . . . .	295
4.35. Décomposition de Jordan-Dunford . . . . .	299
4.36. Matrices de $GL_n(\mathbb{Z})$ à valeurs propres de module $\leq 1$ . . . . .	300
4.37. Une permutation du cône nilpotent . . . . .	301
4.38. Suite de matrices nilpotentes . . . . .	303
4.39. Application adjointe nilpotente . . . . .	304
4.40. Équation avec un crochet de Lie . . . . .	306
4.41. Matrices semblables à leur double . . . . .	306
4.42. Classes de similitudes nilpotentes . . . . .	308
* 4.43. Théorème de Jordan . . . . .	310
4.44. Classes de similitude des matrices de polynôme caractéristique donné . . . . .	313
4.45. Caractérisation des matrices unipotentes . . . . .	314
4.46. Sous-espace stables par une application linéaire de $E^2$ dans $E$ . . . . .	315

4.47. Sous-espace stable strict . . . . .	316
4.48. Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent (1) . . . . .	317
4.49. Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent (2) . . . . .	317
4.50. Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent (3) . . . . .	318
* 4.51. Existence d'un supplémentaire stable par un endomorphisme nilpotent . . . . .	318
* 4.52. Endomorphismes semi-simples . . . . .	320
4.53. Endomorphismes cycliques (1) . . . . .	322
4.54. Endomorphismes cycliques (2) . . . . .	324
* 4.55. Espace de dimension finie engendré par des translatées . . . . .	326
4.56. Endomorphismes simples . . . . .	328
* 4.57. Nombre fini de sous-espaces stables . . . . .	329
* 4.58. Commutant $C(A)$ égal à l'algèbre $K[A]$ . . . . .	330
4.59. Polynôme minimal ponctuel (1) . . . . .	332
4.60. Polynôme minimal ponctuel (2) . . . . .	333
* 4.61. Théorème de Frobenius (1) . . . . .	334
* 4.62. Théorème de Frobenius (2) . . . . .	335
* 4.63. Théorème de Cayley-Hamilton sur un anneau . . . . .	337

## 5. Le groupe linéaire

**341**

5.1. Génération du groupe linéaire . . . . .	341
5.2. Groupe engendré par les matrices diagonalisables inversibles . . . . .	343
5.3. Produits d'automorphismes de trace nulle . . . . .	343
5.4. Matrices qui commutent avec toutes leurs conjuguées . . . . .	344
5.5. Matrices dont la classe de similitude est finie . . . . .	345
5.6. Conjugaison dans $SL_2(\mathbb{C})$ . . . . .	345
5.7. Conjugaison dans $SL_2(\mathbb{R})$ . . . . .	346
5.8. Centralisateur dans $SL_2(\mathbb{C})$ . . . . .	347
5.9. Centralisateur infini . . . . .	348
5.10. Élément d'ordre 5 de $GL_2(\mathbb{Q})$ . . . . .	348
5.11. Isomorphismes entre groupes linéaires . . . . .	349
5.12. Sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ . . . . .	350
* 5.13. Sous-groupe libre de $GL_2(\mathbb{R})$ . . . . .	351
5.14. Un théorème de Burnside . . . . .	353
5.15. Petits sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$ . . . . .	354
5.16. Groupe dérivé de $GL_n(\mathbb{K})$ . . . . .	356
** 5.17. Commutateur égal à $-I_2$ . . . . .	357
5.18. Morphismes de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$ . . . . .	358
5.19. Représentations irréductibles . . . . .	361
5.20. Représentations de $\mathfrak{S}_3$ . . . . .	362
5.21. Morphismes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans un groupe abélien fini . . . . .	365
5.22. Génération de $SL_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	368
5.23. Endomorphismes surjectifs de $SL_n(\mathbb{Z})$ . . . . .	370
5.24. Sous-groupes finis de $SL_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	371
5.25. Ordres des éléments de $GL_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	372
** 5.26. Éléments d'ordre 4 ou 3 dans $SL_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	373
5.27. Ordres des éléments de $GL_n(\mathbb{Z})$ . . . . .	376
5.28. Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$ . . . . .	377

5.29. Cardinal de $GL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{K})$ . . . . .	378
5.30. Nombre d'involutions . . . . .	379
5.31. Un calcul de signature . . . . .	380
5.32. Factorisation dans $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ . . . . .	381
5.33. Étude de $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ . . . . .	382
5.34. Étude de $SL_2(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ . . . . .	384
* 5.35. Réduction modulo $n$ . . . . .	386
5.36. Surjection de $GL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ dans $GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . . . . .	389