

# Table des matières

[\*] : exercice très difficile, ne pas hésiter à consulter le corrigé.

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>Plan de la collection</b>	<b>9</b>
<b>1. Nombres réels et complexes</b>	
<b>Topologie de <math>\mathbb{R}</math> et <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>11</b>
1.1. Développement décimal propre d'un réel . . . . .	13
1.2. Caractérisation des rationnels . . . . .	15
1.3. Réels ayant un 2 ou un 3 dans leur développement décimal . . . . .	18
1.4. Non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$ . . . . .	19
1.5. Injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . . . . .	20
1.6. Calcul d'une somme . . . . .	21
1.7. Développement en série de Engel . . . . .	23
1.8. Séries de Cantor . . . . .	25
*1.9. Représentation des réels comme sommes de séries . . . . .	27
1.10. Décomposition en somme de séries . . . . .	29
1.11. Sur le nombre $e$ . . . . .	31
1.12. Convergence de $n(an! - \lfloor an! \rfloor)$ . . . . .	32
1.13. Irrationalité de $\pi$ . . . . .	34
1.14. Irrationalité de $\frac{\arccos 1/3}{\pi}$ . . . . .	35
1.15. Théorème de Niven (1956) . . . . .	36
1.16. Théorème de Dirichlet . . . . .	37
1.17. Théorème et nombres de Liouville (1844) . . . . .	39
*1.18. Transcendance de $e$ . . . . .	40
1.19. Approximation diophantienne . . . . .	43
1.20. Mesure d'irrationalité . . . . .	44
1.21. Fractions continues . . . . .	45
1.22. Nombres de Pisot . . . . .	49
1.23. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ . . . . .	51
1.24. Une inégalité (1) . . . . .	52
1.25. Une inégalité (2) . . . . .	53
1.26. Inégalité du réordonnement . . . . .	54
1.27. Inégalité de Tchebychev . . . . .	56
1.28. Inégalité dans $\mathbb{C}$ (1) . . . . .	57
1.29. Inégalité dans $\mathbb{C}$ (2) . . . . .	59
*1.30. Un lemme de confinement . . . . .	61
1.31. Équation fonctionnelle de Shapiro . . . . .	64
1.32. Homographies laissant invariant le disque unité . . . . .	65
1.33. Propriété de Borel-Lebesgue sur un segment (1) . . . . .	67
1.34. Propriété de Borel-Lebesgue sur un segment (2) . . . . .	67

1.35. Propriété de Borel-Lebesgue sur un segment (3)	69
1.36. Mesure extérieure de Lebesgue	71
* 1.37. Une partie dense de mesure nulle	72
1.38. Irrationnels denses dans une partie	74
* 1.39. Adhérence de l'ensemble des racines de polynômes	75
1.40. $\mathbb{R}$ n'est pas union dénombrable de segments disjoints	77
* 1.41. Partition dénombrable de $[0, 1]$	78
<b>2. Suites réelles et complexes</b>	<b>81</b>
2.1. Une étude de monotonie	83
2.2. Majoration des termes d'une suite sous-additive	84
2.3. Lemme de Fekete	85
2.4. Permutation des termes d'une suite	86
2.5. Limite d'une suite définie par une permutation de $\mathbb{N}^*$	87
2.6. Suites vérifiant $x_{n+1} \geq \rho x_n + (1 - \rho)x_{n-1}$	88
2.7. Suites monotones	89
2.8. Suites convexes bornées	90
* 2.9. Caractérisation de la convergence au sens de Cesàro	91
* 2.10. Suites convergentes au sens de Cesàro telles que $u_n^6 \rightarrow 1$	92
2.11. Théorème de Mercer	95
2.12. Moyenne de Cesàro d'une suite récurrente	96
* 2.13. Théorème taubérien de Hardy	97
2.14. Limites de tranches de Cauchy	99
2.15. Valeurs d'adhérence d'une suite de produits partiels	102
2.16. Suite dense dans $[0, 1]$	103
* 2.17. Valeurs d'adhérence de $(\{\ln(n!)\})_{n \geq 1}$	104
* 2.18. Suites $(\cos(\pi P(n)))_{n \in \mathbb{N}}$ , où $P \in \mathbb{R}[X]$	105
2.19. Étude de convergence (1)	106
2.20. Étude de convergence (2)	107
2.21. Étude de convergence (3)	108
2.22. Étude de convergence (4)	108
2.23. Étude de convergence (5)	109
2.24. Convergence d'une moyenne de Cesàro	110
2.25. Limite supérieure et inférieure d'une suite réelle bornée	112
2.26. Minoration de la limite supérieure	113
2.27. Intervalle des valeurs d'adhérence	114
* 2.28. Connexité de l'ensemble des valeurs d'adhérence	115
2.29. Suites et approximation diophantienne	117
* 2.30. Équirépartition et densité	119
2.31. Distribution du premier chiffre des puissances de 2	123
2.32. Moyennes des coefficients binomiaux	124
2.33. Équivalent d'une suite d'entiers	125
2.34. Somme des puissances $n$ -ièmes des $n$ premiers entiers	126
2.35. Racines itérées (1)	127
2.36. Racines itérées (2)	129
2.37. Critère de convergence pour un système dynamique discret	130
2.38. Ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite récurrente	130

2.39. Suite récurrente possédant un nombre fini de valeurs d'adhérence . . . .	132
2.40. Étude d'un système dynamique (1) . . . . .	134
2.41. Étude d'un système dynamique (2) . . . . .	137
*2.42. Théorème de Sarkowski (1964) . . . . .	139
2.43. La fonction « tente » . . . . .	141
2.44. Équivalent d'une suite définie par récurrence . . . . .	142
2.45. Suites vérifiant $u_n = \text{th}(u_{n-1})$ . . . . .	144
*2.46. Suite récurrente telle que $u_n \sim \frac{1}{\ln n}$ . . . . .	145
2.47. Développement asymptotique d'une suite récurrente (1) . . . . .	147
2.48. Développement asymptotique d'une suite récurrente (2) . . . . .	148
2.49. Détermination d'une suite récurrente . . . . .	149
2.50. Étude de $x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}$ . . . . .	150
2.51. Un exercice d'Olympiades . . . . .	152
2.52. Initialisation d'une suite récurrente (1) . . . . .	153
2.53. Initialisation d'une suite récurrente (2) . . . . .	154
2.54. Équivalent d'une suite récurrente . . . . .	155
2.55. Suite arithmético-géométrique perturbée . . . . .	156
2.56. Système dynamique perturbé . . . . .	158
2.57. Étude d'une suite récurrente en un point fixe attractif . . . . .	158
2.58. Suite récurrente linéaire d'ordre 2 . . . . .	160
2.59. Une équation fonctionnelle . . . . .	162
2.60. Suites vérifiant $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$ . . . . .	162
2.61. Suites à récurrence linéaire (1) . . . . .	164
2.62. Suites à récurrence linéaire (2) . . . . .	165
2.63. Suites à récurrence linéaire (3) . . . . .	168
2.64. Étude d'une suite récurrente . . . . .	169
2.65. Suite récurrente d'ordre deux (1) . . . . .	170
2.66. Suite récurrente d'ordre deux (2) . . . . .	171
2.67. Suite vérifiant $u_{n+1} = \frac{f(u_1) + \dots + f(u_n)}{n}$ . . . . .	172
2.68. Suites de Schwob . . . . .	173
2.69. Moyenne arithmético-harmonique . . . . .	173
2.70. Algorithme babylonien dans $\mathbb{N}$ . . . . .	175
2.71. Algorithme babylonien. Cas complexe . . . . .	177
2.72. Récurrences simultanées . . . . .	179
2.73. Suite définie implicitement (1) . . . . .	181
2.74. Suite définie implicitement (2) . . . . .	181
2.75. Suite définie implicitement (3) . . . . .	182
2.76. Suite définie implicitement (4) . . . . .	183
2.77. Suite définie implicitement (5) . . . . .	184
2.78. Suite définie implicitement (6) . . . . .	185
2.79. Zéros des polynômes de Taylor d'ordre impair de l'exponentielle . . . . .	186
2.80. Distance à un graphe . . . . .	188

<b>3. Séries numériques</b>	<b>189</b>
3.1. Série divergente . . . . .	190
3.2. Étude de convergence (1) . . . . .	191
3.3. Étude de convergence (2) . . . . .	191
3.4. Convergence simultanée de deux séries . . . . .	192
3.5. Suite et série . . . . .	193
3.6. Nature d'une série explicite (1) . . . . .	194
3.7. Nature d'une série explicite (2) . . . . .	195
3.8. Suites majorantes (1) . . . . .	196
3.9. Suites majorantes (2) . . . . .	197
3.10. Égalité de deux sommes . . . . .	198
*3.11. Nature d'une série . . . . .	199
3.12. Majoration à l'aide d'une intégrale . . . . .	200
3.13. Étude de convergence . . . . .	203
3.14. Sur la négligeabilité . . . . .	204
3.15. Condition nécessaire de convergence . . . . .	205
3.16. Convergence et densité asymptotique . . . . .	206
3.17. Un théorème de comparaison . . . . .	207
3.18. Somme partielle dominée par le terme général . . . . .	208
3.19. Lien suite-série (1) . . . . .	210
3.20. Lien suite-série (2) . . . . .	211
3.21. Lien suite-série (3) . . . . .	212
3.22. Lien suite-série (4) . . . . .	212
3.23. Entiers qui s'écrivent sans le chiffre 9 . . . . .	214
3.24. Critère de condensation de Cauchy . . . . .	215
3.25. Séries définies à l'aide d'une permutation de $\mathbb{N}^*$ . . . . .	216
3.26. Recherche d'un équivalent (1) . . . . .	218
3.27. Recherche d'un équivalent (2) . . . . .	219
3.28. Sommation d'équivalents (1) . . . . .	220
3.29. Sommation d'équivalents (2) . . . . .	220
3.30. Estimation d'une somme partielle . . . . .	222
3.31. Développement asymptotique de la série harmonique . . . . .	224
3.32. Développement asymptotique de restes et sommes partielles . . . . .	226
*3.33. Méthode taubérienne pour un équivalent . . . . .	228
*3.34. Comparaison série-intégrale sur une tranche . . . . .	231
3.35. Calcul de la somme d'une série (1) . . . . .	232
*3.36. Calcul de la somme d'une série (2) . . . . .	233
3.37. Recherche d'un équivalent . . . . .	236
3.38. Série des inverses des entiers premiers . . . . .	238
*3.39. Série définie à partir de ppcm . . . . .	239
3.40. Inversion de Möbius . . . . .	240
3.41. Nombre moyen de diviseurs des entiers inférieurs à $x$ . . . . .	244
3.42. Nature de $\sum \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ . . . . .	246
3.43. Règle de Raabe-Duhamel . . . . .	246
3.44. Développement asymptotique du terme général . . . . .	248
3.45. Autour des séries semi-convergentes . . . . .	250

3.46. Calcul de la somme d'une série alternée . . . . .	250
3.47. Transformation d'Euler . . . . .	252
* 3.48. Sommation par paquets . . . . .	255
3.49. Théorème de Riemann . . . . .	257
3.50. Effet d'une bonne permutation sur une série . . . . .	259
* 3.51. Fonctions qui conservent la convergence . . . . .	260
3.52. Transformation d'Abel (1) . . . . .	263
3.53. Transformation d'Abel (2) . . . . .	263
3.54. Transformation d'Abel (3) . . . . .	264
* 3.55. Transformation d'Abel (4) . . . . .	265
* 3.56. Transformation d'Abel (5) . . . . .	267
3.57. Transformation d'Abel (6) . . . . .	269
3.58. Comparaison série-intégrale . . . . .	271
3.59. Divergence d'une série par observation de tranche . . . . .	272
3.60. Suite des sommes partielles bornée . . . . .	273
3.61. Séries de Hardy . . . . .	274
3.62. Recherche d'un équivalent (1) . . . . .	277
3.63. Recherche d'un équivalent (2) . . . . .	277
3.64. Convergence en moyenne d'un produit de Cauchy . . . . .	280
* 3.65. Limite d'une suite définie par produit de Cauchy . . . . .	281
<b>4. Fonctions d'une variable réelle</b>	<b>287</b>
4.1. Limite et monotonie . . . . .	287
4.2. Applications propres . . . . .	288
4.3. Zéros d'une combinaison linéaire d'exponentielles . . . . .	289
4.4. Caractérisation des fonctions affines . . . . .	290
4.5. Fonctions sur-additives . . . . .	291
4.6. Fonction sous-additive . . . . .	292
4.7. Théorème de Cesàro continu . . . . .	293
* 4.8. Points de discontinuité d'une fonction réglée . . . . .	293
* 4.9. Fonctions continues à droite . . . . .	295
4.10. Discontinuités d'une fonction monotone . . . . .	297
4.11. Continuité au sens de Cesàro . . . . .	298
4.12. Existence d'un point fixe . . . . .	299
4.13. Minoration . . . . .	300
4.14. Cardinal des fibres . . . . .	301
4.15. Échange des rationnels et des irrationnels . . . . .	301
4.16. Un théorème de Paul Lévy (1934) . . . . .	302
4.17. Théorème de Howe (1926) . . . . .	304
4.18. Sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes . . . . .	305
4.19. Conjugaison de deux homéomorphismes . . . . .	306
4.20. Involutions de $\mathbb{R}$ . . . . .	307
* 4.21. Homéomorphisme entre deux parties dénombrables denses . . . . .	308
4.22. Nombre de rotation de Poincaré (1885) . . . . .	309
4.23. Morphismes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ respectant l'inverse . . . . .	311
4.24. Une équation fonctionnelle (1) . . . . .	313
4.25. Une équation fonctionnelle (2) . . . . .	313

4.26. Une équation fonctionnelle (3) . . . . .	314
4.27. Une équation fonctionnelle (4) . . . . .	315
4.28. Une équation fonctionnelle (5) . . . . .	316
4.29. Une équation fonctionnelle (6) . . . . .	316
4.30. Une équation fonctionnelle (7) . . . . .	318
4.31. Valeurs propres d'un opérateur . . . . .	319
4.32. Un exemple . . . . .	320
4.33. Comportement en l'infini . . . . .	321
4.34. Lemme de Croft . . . . .	322
4.35. Produit de fonctions uniformément continues . . . . .	323
4.36. Réciproque au théorème de Heine . . . . .	324
4.37. Dérivabilité de la valeur absolue . . . . .	327
4.38. Étude d'un taux d'accroissement . . . . .	327
4.39. Encadrement du taux d'accroissement . . . . .	328
4.40. Pseudo-dérivée . . . . .	329
4.41. Limite d'une somme . . . . .	330
4.42. Fonctions dérivables à droite . . . . .	331
* 4.43. Fonctions dérivables à gauche et à droite . . . . .	332
4.44. Équation $f' = f \circ f$ . . . . .	333
4.45. Équation $f' = f^{-1}$ . . . . .	333
4.46. Une équation différentielle (1) . . . . .	335
4.47. Inéquation différentielle . . . . .	335
4.48. Inéquation différentielle (2) . . . . .	336
4.49. La fonction sinus n'est pas rationnelle . . . . .	336
4.50. Un cas simple du lemme de Sard . . . . .	337
4.51. Théorème de Darboux (1875) . . . . .	338
4.52. Sur la formule des accroissements finis . . . . .	339
4.53. Maximum local . . . . .	341
4.54. Dénombrabilité des maxima locaux . . . . .	342
4.55. Majoration de $f^2 + f'^2$ . . . . .	343
4.56. Interpolation par splines cubiques . . . . .	343
4.57. Interpolation d'Hermite . . . . .	347
4.58. Dérivées dominées par un polynôme . . . . .	349
4.59. Une généralisation du théorème de Rolle . . . . .	350
4.60. Minoration de la dérivée seconde . . . . .	351
4.61. Zéros des dérivées successives . . . . .	352
4.62. Théorème de Glaeser pour une variable (1963) . . . . .	352
4.63. Étude du maximum de $f \mapsto f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1)$ . . . . .	354
* 4.64. Points entiers sur le graphe . . . . .	355
4.65. Puissances entières . . . . .	356
4.66. Majoration de $f'$ . . . . .	358
4.67. Inégalités de Kolmogorov . . . . .	359
4.68. Factorisation d'une fonction paire . . . . .	361
4.69. Calcul de dérivées . . . . .	363
4.70. Théorème de division . . . . .	364
4.71. Division paire . . . . .	365
4.72. Factorisation d'une fonction réciproque . . . . .	366

4.73. Dérivations de l'algèbre $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . . . . .	367
4.74. Le théorème de réalisation de Borel (1895) . . . . .	368
*4.75. Théorème de Whitney (1934) . . . . .	370
*4.76. Théorème de Sunyer i Balaguer et Corominas (1954) . . . . .	371
4.77. Convexité . . . . .	373
4.78. Inégalité de convexité (1) . . . . .	374
4.79. Inégalité de convexité (2) . . . . .	375
4.80. Inégalité de convexité (3) . . . . .	376
4.81. Inégalité de Hölder . . . . .	377
4.82. Fonction concave sous-additive . . . . .	378
4.83. Fonction mid-convexe continue . . . . .	379
4.84. Étude de régularité . . . . .	380
4.85. Fonction mid-convexe et sur-multiplicative . . . . .	381
4.86. Minimum d'une fonction convexe . . . . .	382
4.87. Intervalle de monotonie d'une fonction strictement convexe . . . . .	383
4.88. Étude asymptotique d'une fonction convexe . . . . .	384
4.89. Positivité d'une fonction . . . . .	384
4.90. Combinaison convexe positive . . . . .	385
4.91. Fonctions à variation bornée . . . . .	387
4.92. Un calcul de limite . . . . .	389
4.93. Un développement asymptotique . . . . .	390
4.94. Estimation du maximum d'une fonction polynôme . . . . .	392
4.95. Intégration d'équivalents . . . . .	394
4.96. Dérivation d'équivalents . . . . .	395