

Table des matières

[*] : exercice très difficile, ne pas hésiter à consulter le corrigé.

[**] : exercice utilisant des notions hors programme, plutôt destiné aux candidats à l'agrégation.

Introduction	5
Plan de la collection	9
1. Intégrales généralisées	11
1.1. Question d'intégrabilité (1)	12
1.2. Question d'intégrabilité (2)	13
1.3. Question de convergence (1)	14
1.4. Question de convergence (2)	15
1.5. Intégrale divergente (1)	16
1.6. Intégrale divergente (2)	17
1.7. Fonction intégrable monotone	18
1.8. Limite en $+\infty$ d'une fonction intégrable (1)	19
1.9. Limite en $+\infty$ d'une fonction intégrable (2)	20
1.10. Limite en $+\infty$ d'une fonction intégrable (3)	22
1.11. Limite en $+\infty$ d'une fonction intégrable (4)	22
1.12. Fonction intégrable log-concave	23
1.13. Croissance d'une fonction définie par une intégrale	24
* 1.14. Fonction maximale de Littlewood	26
1.15. Médiane	28
1.16. Entropie maximale	30
1.17. Composition par une fonction convexe	33
1.18. Sur l'intégrabilité d'un produit	35
1.19. Intégrales des puissances d'une fonction	36
1.20. Calcul d'intégrales (1)	38
1.21. Calcul d'intégrale (2)	39
1.22. Calcul d'intégrale (3)	40
1.23. Calcul d'intégrale (4)	41
1.24. Formule des résidus pour les fractions rationnelles	43
1.25. Majoration d'une intégrale	45
1.26. Une égalité pour des fonctions de carré intégrable	46
1.27. Majoration d'une intégrale	47
1.28. Inégalité de Hardy	48
1.29. Inégalité de Hölder, inégalité de Minkowski	50
1.30. Fonctions g telles que fg soit de carré intégrable	51
1.31. Inégalité de Kolmogorov	53
1.32. Inégalité de Weyl	54
1.33. Une inégalité intégrale	55
1.34. Majoration du reste	58

1.35. Formule de Stirling	59
1.36. Sur la convergence dans L^1	62
1.37. Interversion série-intégrale	63
1.38. Calcul de l'intégrale de Dirichlet (1)	64
1.39. Calcul de l'intégrale de Dirichlet (2)	67
1.40. Intégrale de Gauss	69
1.41. Calcul d'une intégrale à paramètre (1)	70
1.42. Calcul d'une intégrale à paramètre (2)	72
1.43. Calcul d'une intégrale à paramètre (3)	75
1.44. Intégrale de Fresnel	76
1.45. Formule de Gauss et formule de duplication	78
1.46. Convexité logarithmique de Γ	80
1.47. Fonction B d'Euler	82
1.48. Calcul de $\Gamma'(1)$	85
1.49. Intégrale à paramètre (1)	88
1.50. Intégrale à paramètre (2)	90
1.51. Intégrale à paramètre (3)	91
1.52. Étude d'une transformée de Laplace	93
1.53. Zéros d'une transformée de Laplace	96
*1.54. Norme triple du carré de la transformée de Laplace	97
1.55. Transformée de Stieltjes	100
1.56. Inversion de Fourier	102
1.57. Injectivité de la transformée de Fourier	105
1.58. Convolution dans l'espace des fonctions à support compact	108
1.59. Équivalent d'une intégrale partielle	111
1.60. Équivalent d'une intégrale partielle et d'un reste	112
1.61. Développement asymptotique d'un reste	113
1.62. Étude d'une intégrale indéfinie	115
1.63. Lemme de Riemann-Lebesgue généralisé	116
1.64. Calculs de limites	117
1.65. Étude asymptotique d'une transformée de Laplace (1)	118
1.66. Étude asymptotique d'une transformée de Laplace (2)	120
1.67. Étude asymptotique d'une transformée de Laplace (3)	122
1.68. Équivalent d'une intégrale à paramètre (1)	124
1.69. Équivalent d'une intégrale à paramètre (2)	126
1.70. Méthode de Laplace (1)	128
1.71. Méthode de Laplace (2)	129
1.72. Méthode de Laplace (3)	131
*1.73. Méthode de Laplace (4)	133

2. Suites et séries de fonctions

137

2.1. Majoration sur une demi-droite	138
2.2. Une décomposition en série de la valeur absolue	140
2.3. Fonctions continues presque additives	141
2.4. Contrôle uniforme de séries alternées	143
2.5. Sommation au sens de Riemann	144
2.6. Convergence uniforme des séries de Dirichlet	147

2.7.	Étude de la convergence d'une série de fonctions	149
2.8.	Comparaison série-intégrale	150
2.9.	Suite ne convergeant uniformément sur aucun ouvert	153
2.10.	Fonction discontinue en tout rationnel, continue en tout irrationnel	154
2.11.	Continuité et convergence de fonctions	155
2.12.	Limite uniforme de fonctions lipschitziennes	156
2.13.	Série normalement convergente de somme non dérivable	158
2.14.	Propriétés de la fonction ζ	159
2.15.	Étude d'une série de fonctions	161
2.16.	Série de primitives successives	163
2.17.	Non existence d'un plongement isométrique	164
2.18.	Régularité des fonctions de Weierstrass	165
2.19.	Courbe de Bolzano	167
* 2.20.	L'escalier du diable	171
2.21.	Interversion série-intégrale	173
2.22.	Sur le théorème d'intégration d'une série de fonctions	175
2.23.	Approximation polynomiale par convolution	177
2.24.	Autour du théorème de Weierstrass (1)	179
2.25.	Autour du théorème de Weierstrass (2)	180
2.26.	Autour du théorème de Weierstrass (3)	181
2.27.	Un théorème de Walsh	183
2.28.	Théorème de Chudnovsky	184
* 2.29.	Adhérence d'un sous-espace	186
2.30.	Itération d'un opérateur intégral	187
2.31.	Théorème de Korovkin (1953)	188
2.32.	Itération de l'opérateur de Bernstein	190
2.33.	Non-extension du théorème de Weierstrass à la variable complexe	192
2.34.	Approximation de Laguerre	192
2.35.	Convergence d'une suite de polynômes vers l'exponentielle	194
2.36.	Développement eulérien de la cotangente	196
2.37.	Caractérisation d'Artin de la fonction Γ (1931)	199
2.38.	Produits infinis	201
2.39.	Identité de Jacobi	203
2.40.	Développement eulérien du sinus sur \mathbb{C}	207
2.41.	Théorèmes de Dini	210
2.42.	Un théorème de point fixe	212
2.43.	Étude d'une suite récurrente	214
2.44.	Équation fonctionnelle	216
2.45.	Critère de convergence uniforme	218
2.46.	Suite de fonctions lipschitziennes sur un compact	219
2.47.	Convergence uniforme de suites de fonctions convexes	220
2.48.	Condition suffisante de convergence uniforme	221
* 2.49.	Théorème d'Ascoli	223
* 2.50.	Un cas particulier du théorème d'Ascoli	226
* 2.51.	Théorème de sélection de Helly	227
2.52.	Suite de fonctions d'un sous-espace de dimension finie	227
2.53.	Condition suffisante de convergence uniforme	229

2.54. Translatés et convolués d'une fonction	230
2.55. Base de type S	233

3. Séries entières

235

3.1. Calcul de rayon de convergence (1)	236
3.2. Calcul de rayon de convergence (2)	236
3.3. Calcul de rayon de convergence (3)	237
3.4. Relations entre rayons de convergence (1)	237
3.5. Relations entre rayons de convergence (2)	238
3.6. Relations entre rayons de convergence (3)	239
3.7. Rayon de convergence infini	240
*3.8. Étude d'une série entière sur le cercle de convergence	241
*3.9. Divergence en tout point du cercle	244
3.10. Deux théorèmes d'Abel	247
3.11. Calculs de sommes de séries alternées	249
3.12. Séries génératrices de deux suites récurrentes	251
3.13. Calcul de la somme d'une série entière	253
3.14. Somme de deux séries de fonctions	254
3.15. Somme d'une série entière extraite	256
3.16. Zéros d'une série entière	257
3.17. Zéros d'un ensemble de séries entières	258
3.18. Condition suffisante d'injectivité d'une série entière	258
3.19. Théorème de Bieberbach dans le cas réel	260
3.20. Développement en série entière (1)	261
3.21. Développement en série entière (2)	262
3.22. Développement en série entière (3)	264
3.23. Développement en série d'une transformée de Laplace bilatérale	266
3.24. Signe des dérivées successives d'une fonction	267
3.25. Réduction des coefficients modulo m	269
3.26. Développement en série entière des fractions rationnelles	271
3.27. Signe des coefficients d'un développement en série entière	274
3.28. Déterminants de Hankel	276
3.29. Développement en série entière de $\ln \det(\text{Id}_E + tu)$	278
3.30. Composition de deux séries entières	279
*3.31. Développement en série entière d'une série de fonctions	281
*3.32. Développement en série entière de l'inverse	284
*3.33. Fonction à valeurs dans $SL_2(\mathbb{C})$ développable à série entière	287
3.34. Caractérisation des fonctions DSE en 0	289
3.35. Étude au bord de l'intervalle de convergence	292
3.36. Recherche d'un équivalent	293
3.37. Étude asymptotique au bord du disque de convergence (1)	295
3.38. Étude asymptotique au bord du disque de convergence (2)	295
3.39. Un théorème de Gauss	298
3.40. Équivalent d'une série lacunaire	300
3.41. Étude asymptotique en $+\infty$ (1)	301
3.42. Étude asymptotique en $+\infty$ (2)	302
3.43. Théorèmes taubériens	303

3.44. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood (1914)	309
3.45. Série de Laurent à valeurs entières	311
** 3.46. Caractérisation des fonctions réelles analytiques	313
3.47. Étude d'analyticité	315
3.48. Un théorème de Bernstein	318
3.49. Principe des zéros isolés pour les fonctions analytiques réelles	320
3.50. Utilisation de la formule de Cauchy	321
3.51. Nullité sur un arc du cercle de convergence	322
3.52. Série entière à coefficients entiers, bornée	323
3.53. Fonctions entières de partie réelle bornée	324
3.54. Domination par une exponentielle	326
3.55. Principe du maximum (1)	328
3.56. Principe du maximum (2)	329
3.57. Principe du maximum (3)	332
3.58. Extrema d'une fonction entière	335
3.59. Convergence d'une suite de fonctions développables en séries entières	336
3.60. Limite de la suite $(f^{(n)})$ où f est analytique	339
3.61. Limite simple de polynômes à coefficients positifs	339
3.62. Critère de convergence simple d'une suite de séries entières	341
3.63. Espace des fonctions continues sur \overline{D} , développables en série entière sur D	343
* 3.64. Fonction entière telle que $f(2^n) = (-1)^n$	345
** 3.65. Un théorème de Fej�r.	349

4. Polynômes et séries trigonométriques 353

4.1. Calcul d'intégrales	353
4.2. Une équation fonctionnelle	354
4.3. Orthogonalité aux polynômes trigonométriques de degré $< n$	355
4.4. Une inégalité	356
4.5. Inégalité de Hilbert (1)	357
4.6. Inégalité de Hilbert (2)	359
4.7. Majoration de la norme de la dérivation	361
4.8. Inégalité de Bernstein (1912)	363
4.9. Théorème de Weierstrass trigonométrique	365
4.10. Théorème de Fej�r (1904)	368
4.11. Théorème de Jackson (1911)	371
* 4.12. Un théorème de Bernstein (1912)	374
4.13. Théorème de Korovkin trigonométrique	376
4.14. Suite $(n\alpha - [n\alpha])$, avec α irrationnel (1)	379
4.15. Suite $(n\alpha - [n\alpha])$, avec α irrationnel (2)	381
4.16. Suites équiréparties : critère de Weyl	384
4.17. Distribution du premier chiffre des puissances de 2	387
4.18. Théorème de convergence simple de Dirichlet	388
4.19. Algèbre des fonctions presque périodiques	390
4.20. Unicité des coefficients dans le cas de la convergence normale	393
4.21. Régularité d'une série trigonométrique	394
4.22. �tude d'une série trigonométrique	395
4.23. Un développement en série trigonométrique	397

* 4.24. Convergence d'une série trigonométrique	398
4.25. Phénomène de Gibbs	401
4.26. Noyau de Poisson	405