

Table des matières

[*] : exercice très difficile, ne pas hésiter à consulter le corrigé.

[**] : exercice utilisant des notions hors programme, plutôt destiné aux candidats à l'agrégation.

Introduction	5
Plan de la collection	9
1. Combinatoire	11
1.1. Nombres de Fibonacci	12
1.2. Rectangles inscrits dans un triangle	13
1.3. Lemme de Kaplansky	14
1.4. Suites binaires	15
1.5. Complexité d'une suite binaire	16
1.6. Nombre de surjections	17
1.7. Nombre d'involutions	18
1.8. Nombre de dérangements (1)	19
1.9. Nombre de dérangements (2)	20
1.10. Chemins de Dick	21
1.11. Cardinal d'une relation d'équivalence	23
1.12. Problème de poteaux	23
1.13. Théorème d'Erdős-Szekeres (1935)	24
1.14. Partitions d'un entier de produit maximal	25
1.15. Décompositions d'un entier	28
1.16. Théorème de Sperner	31
1.17. Un problème de théorie extrémale des ensembles (1)	33
1.18. Un problème de théorie extrémale des ensembles (2)	34
1.19. Parties maximales instables par somme	35
1.20. Algèbre de Boole	35
1.21. Lemme de Sauer et Shelah (1972)	37
1.22. Réunions égales	38
1.23. Théorème de Howie	39
*1.24. Arbres étiquetés	40
*1.25. Théorème de Menger (1926)	44
1.26. Un théorème de Gauss	46
1.27. Théorème de Beatty (1926)	48
*1.28. Un exercice d'olympiades	49
1.29. Caractérisation des ensembles infinis	50
1.30. Permutations de \mathbb{N}	51
1.31. Familles de parties infinies de \mathbb{N}	51
1.32. Permutations de \mathbb{N}	52
1.33. Tripodes	52
1.34. Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein (1887)	54

* 1.35. Théorème de Ramsey infini	55
2. Familles sommables	57
2.1. Sommabilité d'une suite double	58
2.2. Convergence et somme d'une série double	59
2.3. Nature d'une série arithmétique	60
2.4. Suite de nombres complexes à distances minorées	61
2.5. Fonction zêta généralisée	63
2.6. Étude de séries doubles	66
2.7. Inégalité de Carleman (1923)	67
2.8. Inégalité de Hardy	69
2.9. Convergence de la norme p vers la norme infinie	72
2.10. Sommes des puissances	73
2.11. Sommes de séries	76
2.12. Question de parité	77
2.13. Somme des dérivées successives d'une série entière	78
2.14. Un théorème de Haar	79
2.15. Somme d'une famille multiplicative	81
2.16. Série de Lambert de la fonction de Liouville	83
2.17. Série de Lambert (1)	85
2.18. Série de Lambert (2)	87
2.19. Polynômes sans facteur carré de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$	89
2.20. Partitions multiplicatives	91
2.21. Étude d'une fonction complexe	92
2.22. Limite d'une suite	95
2.23. Sommabilité et convergence commutative	97
2.24. Convergence au sens de la norme $\ \cdot \ _1$	100
2.25. Loi invariante par une matrice stochastique infinie	102
3. Espaces probabilisés	105
3.1. Classes monotones	106
3.2. Exemple de tribus	108
3.3. Tribu sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$	109
3.4. Non-dénombrabilité de l'univers	111
3.5. Densité asymptotique et probabilité	111
3.6. Probabilités sur \mathbb{N}	113
3.7. Écart à l'indépendance	114
3.8. Probabilité d'appartenir à au moins k événements	115
3.9. Urne bicolore	117
3.10. Division euclidienne	118
3.11. Zéros d'un polynôme	119
3.12. Polynômes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux	120
3.13. Passagers dans un avion	121
3.14. Suite logistique	122
3.15. Enveloppe convexe aléatoire	125
3.16. Couple de variables de Bernoulli	125

3.17. Étude de $\mathbb{P}(X_1 - X_2 \leq p)$	126
3.18. Intersection de parties aléatoires	128
3.19. Utilisation de variables de Bernoulli	128
3.20. Points fixes d'une permutation aléatoire (1)	131
3.21. Points fixes d'une permutation aléatoire (2)	132
3.22. Montée de taille maximale	133
3.23. Permutations sans grand cycle	134
3.24. Espérance du nombre de cycles d'une permutation aléatoire	135
3.25. Produit de transpositions aléatoires	136
3.26. Deux suites de variables dont la distance tend vers 0	137
3.27. Records d'une permutation	139
3.28. Probabilités pour que deux permutations commutent	141
3.29. Blocs croissants d'une permutation	143
3.30. Probabilité pour qu'une matrice circulante soit inversible	144
3.31. Inversibilité d'une matrice aléatoire (1)	146
3.32. Inversibilité d'une matrice aléatoire (2)	147
3.33. Inversibilité d'une matrice aléatoire (3)	148
3.34. Déterminant d'une matrice aléatoire (1)	149
3.35. Déterminant d'une matrice aléatoire (2)	151
3.36. Variable aléatoire injective	153
3.37. Variable aléatoire X telle que $X \sim aX + b$	154
3.38. Somme de deux variables et double	154
3.39. Somme de deux variables	156
3.40. Variables aléatoires à valeurs rationnelles	157
3.41. Une version discrète du paradoxe de l'autobus	159
3.42. Différence et minimum de deux variables aléatoires	163
3.43. Somme de variables de Poisson indépendantes	165
3.44. Fonctions transformant une variable géométrique en une variable géométrique	167
3.45. Fonctions transformant une variable de Poisson en une variable de Poisson	168
3.46. Suites liées à une loi de Poisson	169
3.47. Inégalité de Le Cam (1960)	172
3.48. Distance en variation totale	175
3.49. Noyau de transition	177
3.50. Jeux à somme nulle	178
4. Variables aléatoires discrètes	183
4.1. Inégalité sur l'espérance de l'inverse	183
4.2. Inégalité de Chernoff	184
*4.3. Inégalité de Hoeffding	185
4.4. Inégalité de Kolmogorov	188
4.5. Inégalité de Cantelli	189
4.6. Suite récurrente de variables aléatoires	190
*4.7. Nombre d'étapes dans l'algorithme d'Euclide	193
4.8. Calcul d'espérance	194
4.9. Espérance du nombre maximal d'antécédents	196
4.10. Nombre moyen de valeurs prises par n variables i.i.d.	197

4.11. Marche aléatoire dans \mathbb{Z} (1)	199
4.12. Marche aléatoire dans \mathbb{Z} (2)	200
4.13. Marche aléatoire dans \mathbb{Z} (3)	201
4.14. Marche aléatoire dans \mathbb{Z} (4)	203
* 4.15. Marche aléatoire dans \mathbb{Z} (5)	205
4.16. Nombre de retours à l'origine	210
4.17. Probabilité de non-retour à l'origine	211
4.18. Nombre de piles double du nombre de faces	214
4.19. Probabilité de retour à l'origine	215
4.20. Jeu de pile ou face (1)	219
4.21. Jeu de pile ou face (2)	224
4.22. Jeu de pile ou face (3)	225
4.23. Nombre de sommets isolés dans un graphe aléatoire	227
4.24. Graphes de Rado	229
* 4.25. Variables aléatoires et partitions d'entiers	231
4.26. Équation différentielle à données initiales aléatoires	237
4.27. Zéros d'un polynôme trigonométrique aléatoire	238
* 4.28. Zéros d'une série entière aléatoire	240
4.29. Espérance et indépendance de variables aléatoires	244
* 4.30. Somme aléatoire de variables aléatoires	246
4.31. Espérance conditionnelle	249
4.32. Minimisation d'espérances	251
* 4.33. Suite des moments d'une variable finie	253
4.34. Familles à sommes distinctes	256
4.35. Enveloppe convexe d'une partie de la boule unité	257
4.36. Preuve de Bernstein du théorème de Weierstrass	259
* 4.37. Entropie statistique au sens de Shannon	260
4.38. Queue de distribution (1)	263
* 4.39. Queue de distribution (2)	264
4.40. Condition pour qu'une matrice symétrique soit positive	266
4.41. Variable vectorielle centrée réduite	268
4.42. Continuité pour la convergence en probabilité	270
4.43. Convergence en probabilité d'une suite récurrente	271
4.44. Convergence en probabilité dans un jeu de pile ou face	273
4.45. Problème du collectionneur	275
* 4.46. Théorème de Furstenberg-Kesten (1960)	278
4.47. Matrice de variance-covariance empirique	280
4.48. Troncature dans une convergence en probabilité (1)	284
* 4.49. Troncature dans une convergence en probabilité (2)	286
4.50. Convergence en probabilité d'un produit	288
4.51. Temps d'attente d'une famille de rang n dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$	289
* 4.52. Lancer de n boules dans n corbeilles (1)	291
* 4.53. Lancer de n boules dans n corbeilles (2)	294
4.54. Convergence en loi	298
4.55. Convergence en loi vers la loi uniforme	301
4.56. Convergence en loi vers la loi normale	304
4.57. Contrôle uniforme d'une convergence en loi	307

4.58. Sous-suite convergente d'une suite de variables aléatoires 309
 4.59. Cas particulier de la loi forte des grands nombres 310
 * 4.60. Convergence presque sûre d'une moyenne de variables i.i.d. 312
 4.61. Suite de variables aléatoires i.i.d. convergeant en moyenne presque sûrement 315
 * 4.62. Étude de $\frac{X_n}{n}$, avec (X_n) suite de variables i.i.d. 319
 * 4.63. Cas particulier du théorème des trois séries (1) 321
 * 4.64. Cas particulier du théorème des trois séries (2) 323
 ** 4.65. Somme d'une série de variables aléatoires 326

5. Séries génératrices 331

5.1. Nombres de Catalan 331
 5.2. Dérangements 333
 5.3. Nombre d'involutions 335
 5.4. Permutations zigzagantes 336
 5.5. Nombres de Bell 338
 5.6. Partitions d'un entier en parts fixées 341
 5.7. Partitions d'un entier 343
 5.8. Places libres dans un parking 345
 5.9. Somme de deux dés pipés (1) 348
 5.10. Somme de deux dés pipés (2) 349
 5.11. Nombres de cycles d'une permutation aléatoire 350
 5.12. Variable aléatoire sur $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ 352
 5.13. Marche aléatoire sur \mathbb{Z} (1) 354
 5.14. Marche aléatoire sur \mathbb{Z} (2) 357
 5.15. Jeu de pile ou face infini (1) 359
 5.16. Jeu de pile ou face infini (2) 360
 * 5.17. Décomposition d'une loi uniforme 362
 * 5.18. Variables aléatoires infiniment divisibles 364
 5.19. Loi et moments (1) 369
 5.20. Loi et moments (2) 371
 5.21. Variables aléatoires telles que $X + Y \sim X + Z$ 372
 5.22. Fonctions de type positif 373
 5.23. Fonction caractéristique et moments 377
 5.24. Somme et différence de deux variables indépendantes 379
 5.25. Théorème de Paul Lévy pour des variables à valeurs entières 381
 5.26. Cas particulier du théorème de Paul Lévy 383
 5.27. Marche aléatoire dans \mathbb{Z} 386
 5.28. Marche aléatoire dans \mathbb{Z} réduite 389
 5.29. Transformée de Laplace 391

Index 399