

Table des matières

[*] : exercice très difficile, ne pas hésiter à consulter le corrigé.

[**] : exercice utilisant des notions hors programme, plutôt destiné aux candidats à l'agrégation.

Introduction	5
Plan de la collection	9
1. Espaces euclidiens	11
1.1. Combinaisons linéaires à coefficients ± 1	11
1.2. Perturbation d'une base orthonormée	12
1.3. Bornes d'une fonction où intervient le produit scalaire	13
1.4. Boule contenant n points à distances mutuelles supérieures à 2	14
1.5. Familles obtusangles	15
1.6. Norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	17
* 1.7. Inégalités entre traces	18
1.8. Caractérisation des normes euclidiennes	21
1.9. Frame d'un espace euclidien	24
1.10. Fonctions additives sur deux vecteurs orthogonaux (1)	25
1.11. Fonctions additives sur deux vecteurs orthogonaux (2)	28
1.12. Forme linéaire sur un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$	30
1.13. Caractérisation des projecteurs orthogonaux (1)	31
1.14. Caractérisation des projecteurs orthogonaux (2)	32
1.15. Comatrice d'un projecteur orthogonal	33
* 1.16. Norme des projetés d'une base orthonormale	33
1.17. Condition pour que deux projecteurs orthogonaux commutent	35
1.18. Composée de deux projecteurs orthogonaux	37
1.19. Composition de projecteurs orthogonaux	38
1.20. Décomposition en somme de droites et plans stables	39
1.21. Spectre de la différence de deux projecteurs orthogonaux	39
1.22. Distance d'une matrice à l'espace des matrices symétriques	41
1.23. Distance à un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$	41
1.24. Problèmes de minimisation dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$	43
1.25. Distances à un drapeau	45
1.26. Simplexes réguliers	46
1.27. Décomposition QR et inégalité d'Hadamard	49
1.28. Base orthonormale dans $\mathbb{R}[X]$	50
1.29. Polynômes de Laguerre	54
1.30. Polynômes d'Hermite	57
1.31. Méthode de Gauss	59
1.32. Matrices de Gram	61
1.33. Familles équiangulaires	63
1.34. Familles isométriques	64

1.35. Image d'une base orthonormée par un projecteur orthogonal	65
1.36. Contraction d'un espace euclidien	66
1.37. Théorème de Schur	67
1.38. Exemple de matrice orthogonale	67
1.39. Orbites sous l'action d'une isométrie vectorielle	68
1.40. Sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$	69
1.41. Générateurs de $O(E)$	70
1.42. Théorème de Maschke (1898)	72
1.43. Composantes connexes par arcs	73
1.44. Exponentielle de matrices antisymétriques réelles	73
1.45. Convergence en moyenne des puissances d'une isométrie	75
1.46. Vecteur invariant par un groupe fini d'isométries	76
1.47. Simplicité de SO_3	77
1.48. Rotations qui commutent	79
1.49. Polynômes invariants sous l'action de $O_2(\mathbb{R})$	80
1.50. Formes linéaires invariantes par conjugaison	82
1.51. Équation fonctionnelle	83
** 1.52. Endomorphismes conservant le produit vectoriel	84
** 1.53. Le groupe des quaternions	85
1.54. Projection sur un convexe fermé	87
1.55. Lemme de Farkas	89
1.56. Éléments de \mathbb{R}^n à composantes positives	91
2. Réduction des endomorphismes autoadjoints	93
2.1. Norme d'un endomorphisme autoadjoint	93
2.2. Inégalité	94
2.3. Codiagonalisation	95
2.4. Puissances d'une matrice symétrique	95
2.5. Méthode itérative pour une équation linéaire	96
2.6. Pseudo-inverse	97
2.7. Matrices à termes diagonaux égaux	99
2.8. Endomorphismes de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec les conjugaisons orthogonales	100
2.9. Étude d'une trace	101
2.10. Parité du rang d'un endomorphisme antisymétrique	102
2.11. Caractérisation des matrices symétriques ou antisymétriques	103
2.12. Endomorphismes antisymétriques en dimension 3	103
2.13. Carré d'une matrice antisymétrique	104
2.14. Réduction des endomorphismes antisymétriques	105
2.15. Paramétrisation de Cayley	107
2.16. Matrice antisymétrique	108
2.17. Caractérisation des matrices positives avec la trace	109
2.18. Condition pour qu'une matrice soit positive	110
2.19. Matrice symétrique positive définie par blocs	111
2.20. Étude d'un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	112
2.21. Caractérisation des symétries orthogonales	115
2.22. Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif	117

2.23. Produit de matrices symétriques positives	117
2.24. Condition de diagonalisabilité d'une matrice réelle	119
2.25. Condition d'existence de m vecteurs propres indépendants	120
2.26. Une équation matricielle	121
2.27. Équation dans $\mathcal{L}(E)$	122
2.28. Caractérisation de Sylvester des matrices définies positives	124
2.29. Caractérisation des matrices positives	126
2.30. Convergence d'une suite croissante et majorée	127
2.31. Décroissance de la fonction inverse	128
2.32. Comparaison d'endomorphismes symétriques définis positifs	129
2.33. Image de S^2 par une fonction, où S est la boule unité	130
2.34. Majoration et minoration d'une fonction	131
2.35. Inégalité de Kantorovich	132
2.36. Inégalité de convexité	133
2.37. Inégalité	134
2.38. Matrice symétrique de taille 2 à coefficients positifs	135
2.39. Théorème de Perron-Frobenius pour les matrices symétriques	136
2.40. Théorème de Suleimanova (1949)	137
2.41. Matrice de passage à coefficients positifs	140
2.42. Décomposition en valeurs singulières	141
2.43. Dilatation isométrique d'une contraction	143
2.44. Décomposition polaire (1)	144
2.45. Décomposition polaire (2)	146
2.46. Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$	147
2.47. Décomposition de Choleski. Décomposition QR	149
2.48. Inégalité d'Hadamard	151
2.49. Inégalité de Fischer	152
2.50. Recherche d'un minimum	153
2.51. Inégalité de Bergström	154
2.52. Inégalité sur le déterminant de matrices symétriques	155
2.53. Inégalité de Minkowski	156
2.54. Convexité logarithmique	157
2.55. Inégalité sur le déterminant de matrices symétriques	159
2.56. Théorème du minimax	160
2.57. Théorème d'entrelacement de Cauchy	162
2.58. Une réciproque au théorème d'entrelacement de Cauchy	163
2.59. Théorème de perturbation de Weyl	165
2.60. Théorème de majoration de Schur	165
2.61. Inégalités de Ky-Fan	167
2.62. Valeurs propres de la somme de deux matrices symétriques	169
2.63. Majoration de $\text{Tr}(AB)$	170
2.64. Écart maximal entre deux valeurs propres	171
2.65. Somme d'endomorphismes symétriques	172
2.66. Convexité	174

3. Équations différentielles linéaires	177
3.1. Étude d'une équation linéaire singulière (1)	177
3.2. Étude d'une équation linéaire singulière (2)	178
3.3. Étude d'une équation linéaire singulière (3)	180
3.4. Étude d'une équation linéaire singulière (4)	182
3.5. Équation linéaire d'Euler	183
3.6. Équations du second ordre avec second membre	185
3.7. Un problème de Cauchy	186
3.8. Solutions bornées d'une équation d'ordre 2	187
3.9. Prolongement d'une solution	189
3.10. Équation $y'' + y = 0$	191
3.11. Déterminant circulant	192
3.12. Une équation intégrale	193
3.13. Équation de Bessel	194
3.14. Solution développable en série entière de $xy'' + y' + y = 0$	197
3.15. Équation homogène d'ordre n à coefficients constants	199
*3.16. Condition pour qu'une solution soit bornée	200
3.17. Condition d'existence de deux solutions de produit 1	202
3.18. Condition d'existence de deux solutions telles que $y_2 = xy_1$	203
3.19. Un problème aux limites (1)	204
3.20. Un problème aux limites (2)	205
*3.21. Inégalité de Liapounov	206
*3.22. Problème de Cauchy asymptotique	207
3.23. Existence de solutions non bornées	209
3.24. Cas particulier du lemme de Gronwall	210
3.25. Une variante du lemme de Gronwall	211
3.26. Application du lemme de Gronwall	212
3.27. Les solutions de $y'' + ty = 0$ sont bornées	213
3.28. Théorème de stabilité de Liapounov	214
3.29. Endomorphisme défini par une équation différentielle	216
3.30. Solution de carré intégrable	218
3.31. Solutions de carré intégrable d'une famille d'équations différentielles	219
3.32. Solutions de $y' + ay = b$ de limite nulle en $\pm\infty$	222
3.33. Limite en $+\infty$ d'une solution de $x'' = qx$	223
3.34. Direction asymptotique en $+\infty$	225
3.35. Limite d'une solution d'une équation d'ordre 2	226
3.36. Équation dépendant d'un paramètre	227
3.37. Solutions périodiques de $y' + ay = b$	229
*3.38. Solutions périodique de $y'' - \eta y = \varphi$	230
3.39. Théorème d'entrelacement de Sturm	233
3.40. Solutions non nulles s'annulant au plus une fois	234
3.41. Équation $y'' + qy = 0$ avec q strictement négative	235
3.42. Équation $y'' + qy = 0$ avec q positive et croissante (1)	236
3.43. Équation $y'' + qy = 0$ avec q positive et croissante (2)	238
3.44. Théorème de Sturm (1836)	239
*3.45. Zéros de $x'' + x = \varepsilon(t)x'$: étude asymptotique	241
3.46. Zéros de $y'' + t^{\alpha-2}y = 0$: étude asymptotique	243

3.47. Nombre de zéros au voisinage d'un point	244
3.48. Théorème de Bôcher	245
3.49. Équation de Mathieu	246
3.50. Résolution approchée d'une équation d'ordre 2	248
4. Exponentielles de matrices - Systèmes différentiels linéaires	251
4.1. Calcul d'une exponentielle de matrice	251
4.2. Sinus d'une matrice	253
4.3. Expression de $\exp(M)$ comme polynôme en M	254
4.4. Exponentielle à coefficients positifs	255
4.5. Exponentielle de matrices réelles diagonalisables	255
4.6. Exponentielle des matrices symétriques réelles	256
4.7. Image de l'exponentielle	257
4.8. Antécédents de l'identité par l'exponentielle	259
4.9. Formules de Lie	259
4.10. Algèbre de Lie de $SO_n(\mathbb{R})$	262
4.11. Une identité remarquable	262
4.12. Sous-groupes à un paramètre de $GL_n(\mathbb{C})$	263
4.13. Système d'ordre 2 à coefficients constants	265
4.14. Résolution d'un système différentiel	268
4.15. Système à coefficients strictement positifs	269
4.16. Solutions à coordonnées positives	270
4.17. Équation $X' = AX$, avec A antisymétrique (1)	271
4.18. Équation $X' = AX$, avec A antisymétrique (2)	272
4.19. Particule dans un champ magnétique	273
4.20. Solution périodique d'une système différentiel (1)	274
4.21. Solution périodique d'une système différentiel (2)	275
4.22. Solution périodique d'une système différentiel (3)	276
4.23. Équation différentielle de Lax (1)	277
4.24. Équation différentielle de Lax (2)	279
4.25. Équation différentielle de Lax (3)	280
* 4.26. Chemin de matrices nilpotentes	281
4.27. Majoration des solutions d'un système différentiel (1)	282
4.28. Majoration des solutions d'un système différentiel (2)	284
4.29. Distance entre les solutions de deux systèmes différentiels	285
4.30. Résolvante	288
4.31. Classification différentielle des flots linéaires	291
4.32. Calcul de limite pour un système d'ordre 2	292
4.33. Existence d'une limite en $+\infty$	293
4.34. Stabilité d'un système à coefficients constants	295
4.35. Solutions bornées sur \mathbb{R}_+ ou \mathbb{R}	296
4.36. Solutions tendant vers 0 en $\pm\infty$	298
4.37. Théorème de Liapounov	300
4.38. Système différentiel singulier en 0	302
* 4.39. Équation singulière d'ordre 1 dans \mathbb{C}^n	303
4.40. Commandabilité	308

5. Calcul différentiel	311
5.1. Différentielle du déterminant	312
5.2. Étude de différentiabilité en un point	313
5.3. Différentiabilité d'une fonction convexe	314
5.4. Différentiabilité du maximum de plusieurs fonctions	316
5.5. Condition nécessaire et suffisante de différentiabilité	318
5.6. Différentiabilité de la distance à un convexe fermé	320
5.7. Fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_n[X]$	321
5.8. Stricte différentiabilité	323
5.9. L'ouvert des matrices cycliques	325
5.10. Rang localement constant	326
5.11. Caractérisation des fonctions affines	327
5.12. Étude d'une suite récurrente	328
5.13. Loi de groupe de classe C^1 sur \mathbb{R}	330
5.14. Conditions de Cauchy (1)	331
5.15. Conditions de Cauchy (2)	333
5.16. Contre-exemple de Peano	335
5.17. Laplacien	337
5.18. Équation aux dérivées partielles (1)	339
5.19. Équation aux dérivées partielles (2)	341
5.20. Équation aux dérivées partielles (3)	342
5.21. Équation aux dérivées partielles sur un polynôme homogène	345
5.22. Polynômes harmoniques	346
5.23. Factorisation d'une fonction	349
5.24. Espace des dérivations en 0	349
5.25. Isométries infinitésimales	351
5.26. Jacobienne antisymétrique	353
5.27. Théorème de Poincaré	353
5.28. Théorème de relèvement	355
5.29. Minimum des fonctions convexes	357
5.30. Calcul d'un minimum	358
5.31. Gradient d'une fonction minorée	361
5.32. Condition pour l'existence d'un extremum local	362
5.33. Existence d'un maximum	362
5.34. Dynamique du gradient	363
5.35. Descente de gradient	366
5.36. Gradient unitaire	369
5.37. Gradient bijectif	371
5.38. Caractère co-coercif du gradient	372
* 5.39. Variante sur la dynamique du gradient	374
5.40. Fonctions harmoniques (1)	377
** 5.41. Fonctions harmoniques (2)	378
5.42. Principe du maximum (1)	380
5.43. Principe du maximum (2)	381
5.44. Principe du maximum (3)	382
5.45. Principe du maximum (4)	382
* 5.46. Principe du maximum (5)	384

* 5.47. Exploitation d'une hypothèse sur le laplacien	386
5.48. Résolution du problème de Dirichlet par le noyau de Poisson	388
5.49. Trajectoire sur une hypersurface	392
5.50. Exemples d'espaces tangents	392
5.51. Normales à une hypersurface compacte	394
5.52. Maximum sur la boule unité du déterminant de Vandermonde	396
5.53. Injectivité locale d'une fonction de classe C^1	398
5.54. Dilatations de classe C^1	399
* 5.55. Calcul des variations (1)	401
* 5.56. Calcul des variations (2)	404
** 5.57. Calcul des variations (3)	406