

Table des matières

Problèmes	1
1. Scalaires	3
1 Double addition	3
2 Demi-double addition	4
3 Exponentiation	4
4 Nombres complexes	5
5 Transformations affines	5
6 Produits de matrices	6
7 Multiplication modulaire	6
8 Opérations dans des petits ensembles	7
9 Éléments neutres	8
10 Inverses complexes	9
11 Inverses affines	10
12 Inverses matriciels	11
13 Groupes abéliens	11
14 Groupes	14
15 Indépendance des axiomes de groupe	15
16 Corps	16
17 Addition et multiplication dans les corps	18
18 Échec à la distributivité	19
19 Corps finis	20
2. Vecteurs	21
20 Espaces vectoriels	21
21 Exemples	24
22 Combinaisons linéaires	25
23 Sous-espaces vectoriels	27
24 Réunions de sous-espaces	30
25 Sous-espaces engendrés	30

26	Égalité des sous-espaces engendrés	33
27	Quelques sous-espaces engendrés particuliers	34
28	Sommes de sous-espaces	36
29	Distributivité pour les sous-espaces	39
30	Ensembles générateurs	39
31	Dépendance linéaire	40
32	Indépendance	43
3.	Bases	47
33	Changements de bases	47
34	Supplémentaires communs	47
35	Exemples d'indépendance linéaire	48
36	Indépendance sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$	48
37	Indépendance dans $\mathbb{C}^2$	48
38	Vecteurs communs à différentes bases	49
39	Bases de $\mathbb{C}^3$	49
40	Parties libres maximales	49
41	Complexes considérés comme réels	49
42	Sous-espaces de dimension pleine	50
43	Bases incomplètes	50
44	Sous-espaces de dimension finie	51
45	Ensembles générateurs minimaux	51
46	Existence d'ensembles générateurs minimaux	51
47	Ensembles indéfiniment générateurs	52
48	Ensembles relativement indépendants	52
49	Nombre de bases d'un espace vectoriel fini	53
50	Sommes directes	54
51	Espaces quotients	55
52	Dimension d'un espace quotient	58
53	Additivité de la dimension	58
4.	Transformations	61
54	Transformations linéaires	61
55	Domaine et image	65
56	Noyau	68
57	Composition	71
58	Inclusion des images et factorisation	75
59	Transformations considérées comme vecteurs	76
60	Inversibilité	77

61	Exemples d'inversibilité	80
62	Déterminants 2×2	80
63	Déterminants $n \times n$	83
64	Matrices zéro-un	87
65	Bases de matrices inversibles	88
66	Inversibilité en dimension finie	88
67	Matrices	89
68	Matrices diagonales	91
69	Commutativité universelle	92
70	Invariance	92
71	Supplémentaires invariants	93
72	Projecteurs	94
73	Sommes de projecteurs	96
74	Presque idempotence	96
5.	Dualité	97
75	Formes linéaires	97
76	Espace dual	98
77	Systèmes de n équations linéaires à n inconnues . . .	99
78	Réflexivité	101
79	Annulateurs	104
80	Bi-annulateurs	105
81	Transposition	106
82	Transposées des projecteurs	108
83	Matrices transposées	108
6.	Similitude	109
84	Changement de base : les coordonnées ne changent pas	109
85	Changement de base : le vecteur ne change pas	110
86	Transformations semblables	110
87	Matrices semblables	111
88	Similitude héritée	111
89	Similitude réelle et similitude complexe	112
90	Rang et dimension du noyau	113
91	Similitude et rang	114
92	Similitude avec la transposée	114
93	Rang d'une somme	114
94	Rang d'un produit	114
95	Dimension du noyau pour les sommes et les produits	114

96	Quelques matrices semblables	115
97	Équivalence	115
98	Rang et équivalence	117
7.	Formes canoniques	119
99	Valeurs propres	119
100	Somme et produit des valeurs propres	122
101	Valeurs propres de produits	123
102	Polynômes en les valeurs propres	123
103	Permutations diagonalisables	123
104	Polynômes en les valeurs propres, réciproque	126
105	Multiplicités	127
106	Valeurs propres distinctes	128
107	Comparaison des multiplicités	129
108	Triangularisation	129
109	Complexification	132
110	Transformations dont une puissance est l'identité	133
111	Nilpotence	133
112	Produits nilpotents	135
113	Sommes directes nilpotentes	135
114	Forme de Jordan	137
115	Polynôme minimal	139
116	Interpolation de Lagrange non commutative	141
8.	Espaces hermitiens	143
117	Produit scalaire	143
118	Polarisation	144
119	Le théorème de Pythagore	145
120	La règle du parallélogramme	145
121	Systèmes orthonormés complets	145
122	L'inégalité de Schwarz	146
123	Supplémentaires orthogonaux	147
124	Encore des formes linéaires	148
125	Adjointes	148
126	Formes quadratiques	151
127	Formes quadratiques alternées	154
128	Transformations hermitiennes	155
129	Transformations antihermitiennes	156
130	Formes réelles hermitiennes	156

131	Transformations positives	157
132	Inverses positifs	159
133	Projections orthogonales	159
134	Projections sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$	160
135	Ordre des projections	160
136	Projections orthogonales entre elles	160
137	Valeurs propres des transformations hermitiennes	161
138	Valeurs propres distinctes	162
9.	Normalité	163
139	Transformations unitaires	163
140	Matrices unitaires	163
141	Involutions unitaires	164
142	Triangles unitaires	164
143	Diagonalisation des hermitiens	164
144	Racines carrées	166
145	Décomposition polaire	167
146	Transformations normales	167
147	Diagonalisation normale	168
148	Commutativité normale	169
149	Commutation avec l'adjoint	169
150	Entrelacement des adjoints	170
151	Produits de normaux	171
152	Fonctions de transformations	172
153	Matrices de Gram	173
154	Fonctions monotones	174
155	Noyaux et images réducteurs	174
156	Shifts tronqués	175
157	Racines carrées non positives	176
158	Transformations normales semblables	177
159	Équivalence unitaire des transposées	178
160	Équivalence unitaire et équivalence orthogonale	179
161	Puissances convergeant vers 0	180
162	Puissances bornées	181
163	Réduction et indice 2	182
164	Nilpotence et réduction	182
	Indications	185

Solutions	203
1. Scalaires	205
2. Vecteurs	227
3. Bases	241
4. Transformations	257
5. Dualité	283
6. Similitude	291
7. Formes canoniques	311
8. Espaces hermitiens	333
9. Normalité	349