

Table des matières

Problèmes	1
1. Combinatoire	3
1 A Matches de tennis	3
1 B Amis et étrangers	4
1 C Matrices symétriques	5
1 D Le problème des mariages	6
1 E Infidélité conjugale	7
1 F Sous-suites monotones	8
1 G Lignes croissantes	9
1 H Poignées de mains	10
1 I Placement	10
1 J Jeu d'échecs infini	11
1 K Gants chirurgicaux	12
2. Suites et fonctions	13
2 A Cosinus itéré	13
2 B Limites de racines carrées	14
2 C Multiples de nombres irrationnels	15
2 D Racines carrées vues comme limites	15
2 E Un calcul de maximum	16
2 F Intégrale double	16
2 G Règle du produit	17
2 H Inégalité exponentielle	18
2 I Voie de chemin de fer	19
2 J Accélération	20
3. Jeux mathématiques	23
Introduction	23
3 A Les concombres	23
3 B Exposants irrationnels	23

3 C	Factorielle d'un million	24
3 D	Noix de coco	24
3 E	Trois 2	24
3 F	Carrés magiques	25
3 G	Entiers consécutifs	26
4.	Nombres	27
4 A	Puissances et nombres premiers	27
4 B	Nombres premiers formés de 0 et de 1	27
4 C	Théorème des restes chinois	27
4 D	Suites d'entiers avec facteurs carrés	29
4 E	La somme des chiffres	30
4 F	Non-divisibilité	31
4 G	Suites sans blocs	31
4 H	Produit maximum	32
4 I	Tours de 5 et de 10	32
4 J	Tours de 3	33
4 K	Perforatrice irrationnelle	34
5.	Géométrie	35
	Introduction	35
5 A	La pyramide et le tétraèdre	35
5 B	Le problème de Sylvester	35
5 C	Triangle d'aire maximale	36
5 D	Triangle d'aire minimale	36
5 E	Réseau routier optimal	36
5 F	Règle trop courte et compas rouillé	36
5 G	Triangles disjoints	37
5 H	Rectangle maximal	38
5 I	Dichotomie de triangles	38
5 J	Congruence de Cavalieri	39
5 K	Points extrémaux (dimension 2)	39
5 L	Points extrémaux (dimension 3)	41
5 M	Points extrémaux (dimension finie)	42
5 N	Enveloppe convexe fermée	42
6.	Pavages	45
6A	Croque, carré	45
6 B	Croque, mince	46
6 C	Croque, infini	47

6 D	Croque, fini	47
6 E	Plan, trois couleurs	47
6 F	Plan, dix couleurs	48
6 G	Pavage par des dominos	48
6 H	Autre pavage par des dominos	50
6 I	Dominos longs	50
6 J	Dominos angulaires	51
6 K	Rectangles entiers	52
7.	Probabilités	55
7 A	Dés truqués	55
7 B	Dés truqués pour le bon motif	55
7 C	Dés renumérotés	56
7 D	Transitivité des probabilités	56
7 E	Le meilleur cheval perd	57
7 F	L'exception gagne	58
7 G	L'exception parmi quatre	58
7 H	Probabilité $1/3$	59
7 I	Probabilité $1/\pi$	59
7 J	Boules dans des urnes	59
7 K	Espérances de sommes	59
7 L	Nombres dans un chapeau	60
8.	Analyse	61
8 A	Empilements de racines	61
8 B	La norme L^1 d'une dérivée	61
8 C	Dérivée bornée	62
8 D	Carré du logarithme	62
8 E	Logarithme sur polynôme	63
8 F	Cordes universelles	63
8 G	Continuité au sens de Cesàro	64
8 H	La fonction de Cantor	66
8 I	Points fixes des fonctions entières	69
8 J	Polynômes unitaires	70
8 K	Cordes semi-universelles	71
8 L	Polynômes bornés	72
8 M	Limites de polynômes	72
8 N	Série harmonique, série des inverses des nombres premiers	72
8 O	Exponentielles rationnelles	74

8 P	Série harmonique, valeurs	74
8 Q	Série harmonique, lacunes	74
9.	Matrices	75
9 A	Réunions de sous-espaces	75
9 B	Supplémentaires communs	75
9 C	Racines carrées de matrices	77
9 D	Inverses et polynômes	79
9 E	Vecteurs propres en surnombre	79
9 F	Matrices paires	79
9 G	Matrices dont les puissances tendent vers zéro	80
9 H	Moyennes mobiles	80
9 I	Racines carrées et polynômes	81
9 J	Isométries linéaires	82
9 K	Perturbations de l'identité	83
9 L	Endomorphismes normaux qui commutent	84
9 M	Normes de produits de normaux	85
9 N	Exponentielle d'une somme	85
9 O	Nécessité de la commutativité	86
9 P	Exponentielle d'une somme d'hermitiens	86
9 Q	Inégalité exponentielle	86
10.	Algèbre	89
10 A	Réels modulo 1	89
10 B	Corps et groupes	89
10 C	Fonctions symétriques élémentaires	91
10 D	Divisibilité des polynômes	91
10 E	Corps non isomorphes	91
10 F	Valeurs des polynômes	92
10 G	Inverses à gauche	92
10 H	Produit total	93
10 I	Classes	94
10 J	Automorphismes non triviaux	94
10 K	Automorphismes, 3/4	95
10 L	Automorphismes, 4/5	95
10 M	Plongement de semi-groupes	95
10 N	Réunions de sous-groupes	96
10 O	Sous-groupes maximaux	96
10 P	Groupes de Cantor-Bernstein	97

11. Ensembles	99
11 A Droites dans le plan	99
11 B Ensembles presque disjoints	99
11 C Ensembles presque disjoints avec borne	99
11 D Un espace vectoriel réel complexe	100
11 E Fonctions rationnelles irrationnelles	100
11 F Semi-groupes réels	100
11 G Adhérence et complémentaire	101
11 H Sommes d'ensembles	102
11 I Cantor plus Cantor	103
11 J Boules décroissantes	103
11 K Convexes décroissants	104
12. Espaces	105
12 A Connexes codénombrables	105
12 B Connexes dénombrables	105
12 C Connexes décroissants	106
12 D Remplissage du plan par des cercles (vrais)	106
12 E Remplissage du plan par des cercles (topologiques)	107
12 F Remplissage de l'espace par des cercles (topologiques)	108
12 G Remplissage de l'espace par des cercles (vrais)	108
12 H Intervalles fermés contre intervalles ouverts	108
12 I Réunions d'intervalles fermés	109
12 J Réunions d'intervalles ouverts	109
12 K Intervalle vu comme produit	109
12 L Métriques convexes	110
12 M Cartes circulaires	111
13. Applications	115
13 A Points fixes simultanés	115
13 B La carte sur la carte	115
13 C Transformations incompressibles	116
13 D Groupes topologiques non isomorphes	116
13 E Groupes connexes	117
13 F Théorème de l'application inverse	117
14. Mesures	119
14 A Problème du gâteau – faux	119
14 B Problème du gâteau – juste	120
14 C Intégrales à bornes variables	120

14 D Recouvrements d'un ensemble de mesure nulle	121
14 E Fonctions non bornées	121
14 F Égalité des mesures	122
14 G Intersections d'ensembles de mesure strictement positive	122
14 H Intersections non dénombrables	123
14 I Intersections non vides	124
Indications	125
Solutions	145
1. Combinatoire	147
2. Suites et fonctions	161
3. Jeux mathématiques	173
4. Nombres	183
5. Géométrie	197
6. Pavages	219
7. Probabilités	233
8. Analyse	249
9. Matrices	269
10. Algèbre	285
11. Ensembles	297
12. Espaces	307
13. Applications	319
14. Mesures	325