

Table des matières

Introduction	1
Première partie : Modèles intérieurs	5
1 Axiomes de Zermelo-Frænkel	7
Axiome d'extensionnalité	8
Axiome de la paire	8
Axiome de la réunion	9
Axiome de l'ensemble des parties	10
Schéma de remplacement	14
2 Ordinaux, cardinaux	19
Relations de bon ordre	19
La collection des ordinaux	20
Définitions par induction	24
Induction sur une collection stratifiée	26
L'axiome du choix	27
Cardinaux	30
Ordinaux finis	34
Ensembles et cardinaux infinis	36
Deux collections bien ordonnées	37
3 L'axiome de fondation	41
Ensembles héréditairement finis	45
Énoncés restreints	46
Consistance de l'axiome de fondation	47
Indépendance de l'axiome de l'infini	48
Consistance de l'axiome d'accessibilité	49

4 Le schéma de réflexion	53
Comparaison des théories Z et ZF	56
5 L'ensemble des formules	61
Restriction d'une formule à un ensemble	65
6 Ensembles définissables en termes d'ordinaux	67
7 Modèles de Frænkel-Mostowski	75
Consistance de la négation de l'axiome du choix	78
8 Ensembles constructibles	85
Énoncés à quantificateurs universels bornés	89
$V = L$ implique AC	95
$V = L$ implique l'hypothèse du continu	96
9 Le théorème d'incomplétude de Gödel	101
Applications	107
 Deuxième partie : Forcing	 111
10 Un cas simple de forcing	113
Modèles transitifs dénombrables	113
Un principe de choix	114
Définition et propriétés du forcing	117
Application à la preuve du principe de choix	119
11 Extensions génériques	123
Applications contractantes	128
Définition du modèle $\mathcal{M}[G]$	129
Définition du forcing	131
Lemme de vérité et axiomes de ZF	134
Forcing faible	139
Introduction de nouveaux symboles de relation	142
12 Indépendance de l'hypothèse du continu	145
Consistance de $HGC + V \neq L$	150
13 Indépendance de l'axiome du choix	151
Retour sur les ensembles définissables	151
Automorphismes d'un ensemble de conditions	153

Consistance de $HGC + \exists x$ non $DO(x)$	155
Indépendance de l'axiome du choix	157
14 Produits d'ensembles de conditions	161
Produit d'une famille d'ensembles de conditions	163
Axiomes du choix dépendant et dénombrable	165
Consistance de $ACD +$ « il n'y a pas d'ultrafiltre non trivial sur ω »	168
Consistance de $ACD +$ « \mathbb{R} n'a pas de base sur \mathbb{Q} »	173
15 Chaînes et antichaînes	181
Conditions d'antichaîne	181
Destruction de cardinaux	183
Le modèle de Lévy	185
Conditions de chaîne	189
16 Algèbres de Boole complètes	199
Algèbre de Boole complète d'un ensemble ordonné	200
Algèbres de Boole complètes de bons ouverts	202
Ultrafiltres \mathcal{M} -complets	203
Valeurs booléennes pour les énoncés	206
Applications à la théorie des algèbres de Boole complètes	210
17 Arbres	217
Extensions génériques minimales	218
Consistance de $ACD +$ « toute partie de \mathbb{R} est mesurable »	222
Exercices	233
Sur les chapitres 1, 2, 3	233
Sur les chapitres 4, 5, 6	236
Sur les chapitres 7, 8, 9	238
Sur les chapitres 10, 11, 12	241
Sur les chapitres 13, 14, 15	246
Sur les chapitres 16, 17	252
Bibliographie	259
Index	263