

Table des matières

Préface

XIII

Partie I. Séries de Fourier

par Jean-Pierre Kahane

Introduction. En quoi consistent les séries de Fourier ?	3
Chapitre 1. Qui était Fourier ?	7
Chapitre 2. Le début des séries de Fourier	13
2.1. La théorie analytique de la chaleur. Introduction	13
2.2. Chapitres I, II, III	14
2.3. Chapitres IV à IX	18
2.4. Retour sur le calcul des coefficients	19
2.5. Retour à l'introduction	21
Chapitre 3. Précurseurs et concurrents	29
3.1. La préhistoire de l'analyse harmonique	29
3.2. Les cordes vibrantes, D. Bernoulli, Euler, d'Alembert	29
3.3. Lagrange	31
3.4. Les formules d'Euler et Fourier. Clairaut	34
3.5. Poisson, Cauchy	35
3.6. Pour en savoir plus	36
Chapitre 4. Dirichlet et le problème de la convergence	37
4.1. Dirichlet	37
4.2. Commentaires sur l'article	38
4.3. Le problème de la convergence depuis lors	40
4.4. Dirichlet et Jordan	43
4.5. L'article original de Dirichlet	44
4.6. Une citation de Jacobi	55

Chapitre 5. Riemann et l'analyse réelle	57
5.1. Riemann	57
5.2. Le mémoire sur les séries trigonométriques. La partie historique	58
5.3. Le mémoire sur les séries trigonométriques. La notion d'intégrale	59
5.4. Le mémoire sur les séries trigonométriques. Les fonctions représentées par de telles séries	61
5.5. Le mémoire sur les séries trigonométriques. La section finale .	63
5.6. Autres séries trigonométriques spéciales. Riemann et Weierstrass	67
5.7. Coup d'œil sur l'influence du mémoire de Riemann juste après 1867	69
5.8. Un aperçu de l'influence du mémoire de Riemann au vingtième siècle	70
5.9. Le début du mémoire de Riemann (sections 1 à 6)	73
Chapitre 6. Cantor et la théorie des ensembles	105
6.1. Cantor	105
6.2. Les travaux de Cantor sur les séries trigonométriques	106
6.3. <i>Über die Ausdehnung...</i>	108
6.4. Ensembles d'unicité et ensembles de multiplicité	109
6.5. Deux méthodes pour les ensembles minces en analyse de Fourier	112
6.6. La méthode de Baire	113
6.7. Randomisation	114
6.8. Un retour sur la théorie de Baire	115
6.9. Le nouvel impact de la théorie générale des ensembles	117
6.10. Le premier article de théorie des ensembles	118
Chapitre 7. Le tournant du siècle et le théorème de Fejér	139
7.1. Les séries trigonométriques comme sujet peu recommandable	139
7.2. Les circonstances du théorème de Fejér	141
7.3. Quelques applications et prolongements du théorème de Fejér .	144
7.4. Petite récapitulation (noyaux usuels)	149
Chapitre 8. Lebesgue et l'analyse fonctionnelle	151
8.1. Lebesgue	151
8.2. 1902–1906 : Lebesgue, Fatou et les séries trigonométriques . .	152
8.3. Séries trigonométriques et intégrale de Lebesgue	155
8.4. Fatou-Parseval et Riesz-Fischer	156
8.5. Riesz-Fischer et les espaces de Hilbert	157
8.6. L^p , ℓ^p , fonctions et coefficients	159
8.7. L^p , H^p , fonctions conjuguées	161

8.8. Fonctionnelles	163
8.9. Approximation	165
8.10. Stabilité des procédés linéaires	167
Chapitre 9. Lacunes et rando	169
9.1. Esquisse historique	169
9.2. Séries de Rademacher, séries de Steinhaus et séries gaussiennes	171
9.3. Séries de Hadamard, produits de Riesz et ensembles de Sidon .	174
9.4. Séries trigonométriques aléatoires	177
9.5. Rando et ensembles de Sidon	180
9.6. Séries orthogonales lacunaires et ensembles $\Lambda(s)$	182
9.7. Propriétés locales et globales des séries trigonométriques aléatoires	183
9.8. Propriétés locales et globales des séries trigonométriques lacu- naires	185
9.9. Propriétés locales et globales des séries trigonométriques d'Hada- mard	188
Chapitre 10. Structures algébriques	191
10.1. L'héritage de Norbert Wiener	191
10.2. Groupes abéliens compacts	192
10.3. Le théorème de Wiener-Lévy	195
10.4. La réciproque du théorème de Wiener-Lévy	197
10.5. Solution négative d'un problème de synthèse spectrale	199
10.6. Un autre problème de synthèse spectrale avec réponse négative	201
10.7. Homomorphismes des algèbres $A(G)$	202
Chapitre 11. Martingales et espaces H^p	205
11.1. Séries de Taylor, séries de Walsh et martingales	205
11.2. Une utilisation typique des développements de Walsh : la meilleure constante dans une inégalité de Khintchine	206
11.3. Séries de Walsh et martingales dyadiques	208
11.4. Le théorème de Paley sur les séries de Walsh	209
11.5. Les espaces H^p de martingales dyadiques	212
11.6. Les espaces H^p classiques et le mouvement brownien	214
Chapitre 12. Quelques applications classiques et un aperçu de la théorie du signal	217
12.1. Retour à Fourier	217
12.2. Les trois EDP classiques	217
12.3. Deux problèmes extrémaux sur les courbes planes	220

12.4. La formule sommatoire de Poisson, l'équation fonctionnelle de Riemann et l'échantillonnage à la Shannon	223
12.5. Transformée de Fourier rapide (FFT : fast Fourier transform)	226
12.6. Un aperçu de la théorie du signal	229
Bibliographie	239
Index	257

Partie II. Ondelettes

par Pierre Gilles Lemarié-Rieusset

Introduction. Les ondelettes : bref aperçu historique	269
1. Jean Morlet et le début de la théorie des ondelettes (1982)	269
2. Alex Grossmann et l'équipe de Marseille (1984)	273
3. Yves Meyer et le triomphe de l'analyse harmonique (1985)	275
4. Stéphane Mallat et la transformation en ondelettes rapide	278
5. Ingrid Daubechies et les filtres RIF (1987)	280
Chapitre 0. Qu'est-ce qu'une ondelette ?	285
0.1. Les ondelettes continues	285
0.2. Frames (discrets) d'ondelettes	288
0.3. Bases d'ondelettes	289
0.4. Ondelettes et espaces fonctionnels	291
Chapitre 1. La notion de représentation en ondelettes	293
1.1. Localisation temps-fréquence et inégalité de Heisenberg	293
1.2. Familles presque orthogonales, frames et bases dans un espace de Hilbert	298
1.3. Fenêtres de Fourier, ondelettes de Gabor et théorème de Balian-Low	301
1.4. Les ondelettes de Morlet	304
1.5. Analyse par ondelettes de la régularité globale	308
1.6. Analyse par ondelettes de la régularité ponctuelle	315
Chapitre 2. Transformations en ondelettes discrètes	321
2.1. Théorèmes d'échantillonnage pour la représentation en ondelettes de Morlet	321
2.2. Le lemme des vaguelettes et autres résultats sur les espaces H^s	323

2.3. Démonstration du théorème d'échantillonnage régulier	328
2.4. Démonstration du théorème d'échantillonnage irrégulier	333
2.5. Quelques remarques sur les frames duaux	335
2.6. Théorie des ondelettes et théorie moderne de Littlewood-Paley	338
Chapitre 3. La structure d'une base d'ondelettes	341
3.1. Espaces de fonctions invariants par translation	342
3.2. La structure d'une base d'ondelettes	353
3.3. Analyses multi-résolution. Définition et exemples	359
3.4. Non-existence d'ondelettes régulières pour l'espace de Hardy H^2	362
Chapitre 4. La théorie des filtres d'échelle	367
4.1. Analyses multi-résolution, fonctions d'échelle et filtres d'échelle	367
4.2. Propriétés des filtres d'échelle	370
4.3. Dérivées et primitives d'une fonction d'échelle régulière	379
4.4. Fonctions d'échelle à support compact	385
Chapitre 5. Fonctions de Daubechies et autres exemples de fonctions d'échelle	395
5.1. Fonctions d'échelle interpolantes	395
5.2. Analyses multi-résolution orthogonales	405
5.3. Fonctions splines : le cas des ondelettes splines orthogonales	423
5.4. Ondelettes splines bi-orthogonales	428
Chapitre 6. Ondelettes et espaces fonctionnels	433
6.1. Ondelettes bi-orthogonales et analyse fonctionnelle	433
6.2. Ondelettes et espaces de Lebesgue	438
6.3. H^1 et BMO	448
6.4. Espaces de Lebesgue à poids	454
6.5. Espaces de Besov	456
6.6. Analyse locale	464
Chapitre 7. Ondelettes à plusieurs variables	467
7.1. Ondelettes à plusieurs variables : description générale	467
7.2. Existence des ondelettes multivariées	472
7.3. Propriétés des ondelettes à plusieurs variables	478

Chapitre 8. Algorithmes	479
8.1. La transformation en ondelettes continue	479
8.2. L'algorithme de Mallat	481
8.3. Ondelettes sur l'intervalle	487
8.4. Formules de quadrature	492
8.5. L'algorithme BCR	495
8.6. Le « wavelet shrinkage » de Donoho	498
Chapitre 9. Extensions de la théorie des ondelettes	499
9.1. Fonctions d'échelle multiples	499
9.2. Les paquets d'ondelettes	500
9.3. Bases de sinus locaux	504
9.4. L'algorithme du « matching pursuit »	509
Chapitre 10. Exemples d'utilisation des ondelettes en analyse	513
10.1. Ondelettes et para-produits	513
10.2. Le théorème « div-curl »	517
10.3. Les opérateurs de Calderón-Zygmund	519
10.4. La fonction de Riemann	524
Bibliographie	527
Index	535