

# Table des matières

**Préface**

**XIII**

## Partie I. Séries de Fourier

par Jean-Pierre Kahane

<b>Introduction. En quoi consistent les séries de Fourier ?</b>	<b>3</b>
<b>Chapitre 1. Qui était Fourier ?</b>	<b>7</b>
<b>Chapitre 2. Le début des séries de Fourier</b>	<b>13</b>
2.1. La théorie analytique de la chaleur. Introduction . . . . .	13
2.2. Chapitres I, II, III . . . . .	14
2.3. Chapitres IV à IX . . . . .	18
2.4. Retour sur le calcul des coefficients . . . . .	19
2.5. Retour à l'introduction . . . . .	21
<b>Chapitre 3. Précurseurs et concurrents</b>	<b>29</b>
3.1. La préhistoire de l'analyse harmonique . . . . .	29
3.2. Les cordes vibrantes, D. Bernoulli, Euler, d'Alembert . . . . .	29
3.3. Lagrange . . . . .	31
3.4. Les formules d'Euler et Fourier. Clairaut . . . . .	34
3.5. Poisson, Cauchy . . . . .	35
3.6. Pour en savoir plus . . . . .	36
<b>Chapitre 4. Dirichlet et le problème de la convergence</b>	<b>37</b>
4.1. Dirichlet . . . . .	37
4.2. Commentaires sur l'article . . . . .	38
4.3. Le problème de la convergence depuis lors . . . . .	40
4.4. Dirichlet et Jordan . . . . .	43
4.5. L'article original de Dirichlet . . . . .	44
4.6. Une citation de Jacobi . . . . .	55

<b>Chapitre 5. Riemann et l'analyse réelle</b>	<b>57</b>
5.1. Riemann . . . . .	57
5.2. Le mémoire sur les séries trigonométriques. La partie historique	58
5.3. Le mémoire sur les séries trigonométriques. La notion d'intégrale	59
5.4. Le mémoire sur les séries trigonométriques. Les fonctions représentées par de telles séries . . . . .	61
5.5. Le mémoire sur les séries trigonométriques. La section finale .	63
5.6. Autres séries trigonométriques spéciales. Riemann et Weierstrass	67
5.7. Coup d'œil sur l'influence du mémoire de Riemann juste après 1867 . . . . .	69
5.8. Un aperçu de l'influence du mémoire de Riemann au vingtième siècle . . . . .	70
5.9. Le début du mémoire de Riemann (sections 1 à 6) . . . . .	73
<b>Chapitre 6. Cantor et la théorie des ensembles</b>	<b>105</b>
6.1. Cantor . . . . .	105
6.2. Les travaux de Cantor sur les séries trigonométriques . . . . .	106
6.3. <i>Über die Ausdehnung...</i> . . . . .	108
6.4. Ensembles d'unicité et ensembles de multiplicité . . . . .	109
6.5. Deux méthodes pour les ensembles minces en analyse de Fourier	112
6.6. La méthode de Baire . . . . .	113
6.7. Randomisation . . . . .	114
6.8. Un retour sur la théorie de Baire . . . . .	115
6.9. Le nouvel impact de la théorie générale des ensembles . . . . .	117
6.10. Le premier article de théorie des ensembles . . . . .	118
<b>Chapitre 7. Le tournant du siècle et le théorème de Fejér</b>	<b>139</b>
7.1. Les séries trigonométriques comme sujet peu recommandable	139
7.2. Les circonstances du théorème de Fejér . . . . .	141
7.3. Quelques applications et prolongements du théorème de Fejér .	144
7.4. Petite récapitulation (noyaux usuels) . . . . .	149
<b>Chapitre 8. Lebesgue et l'analyse fonctionnelle</b>	<b>151</b>
8.1. Lebesgue . . . . .	151
8.2. 1902–1906 : Lebesgue, Fatou et les séries trigonométriques . .	152
8.3. Séries trigonométriques et intégrale de Lebesgue . . . . .	155
8.4. Fatou-Parseval et Riesz-Fischer . . . . .	156
8.5. Riesz-Fischer et les espaces de Hilbert . . . . .	157
8.6. $L^p$ , $\ell^p$ , fonctions et coefficients . . . . .	159
8.7. $L^p$ , $H^p$ , fonctions conjuguées . . . . .	161

8.8. Fonctionnelles . . . . .	163
8.9. Approximation . . . . .	165
8.10. Stabilité des procédés linéaires . . . . .	167
<b>Chapitre 9. Lacunes et randon</b>	<b>169</b>
9.1. Esquisse historique . . . . .	169
9.2. Séries de Rademacher, séries de Steinhaus et séries gaussiennes	171
9.3. Séries de Hadamard, produits de Riesz et ensembles de Sidon .	174
9.4. Séries trigonométriques aléatoires . . . . .	177
9.5. Randon et ensembles de Sidon . . . . .	180
9.6. Séries orthogonales lacunaires et ensembles $\Lambda(s)$ . . . . .	182
9.7. Propriétés locales et globales des séries trigonométriques aléatoires	183
9.8. Propriétés locales et globales des séries trigonométriques lacu- naires . . . . .	185
9.9. Propriétés locales et globales des séries trigonométriques d'Hada- mard . . . . .	188
<b>Chapitre 10. Structures algébriques</b>	<b>191</b>
10.1. L'héritage de Norbert Wiener . . . . .	191
10.2. Groupes abéliens compacts . . . . .	192
10.3. Le théorème de Wiener-Lévy . . . . .	195
10.4. La réciproque du théorème de Wiener-Lévy . . . . .	197
10.5. Solution négative d'un problème de synthèse spectrale . . . . .	199
10.6. Un autre problème de synthèse spectrale avec réponse négative	201
10.7. Homomorphismes des algèbres $A(G)$ . . . . .	202
<b>Chapitre 11. Martingales et espaces <math>H^p</math></b>	<b>205</b>
11.1. Séries de Taylor, séries de Walsh et martingales . . . . .	205
11.2. Une utilisation typique des développements de Walsh : la meilleure constante dans une inégalité de Khintchine . . . . .	206
11.3. Séries de Walsh et martingales dyadiques . . . . .	208
11.4. Le théorème de Paley sur les séries de Walsh . . . . .	209
11.5. Les espaces $H^p$ de martingales dyadiques . . . . .	212
11.6. Les espaces $H^p$ classiques et le mouvement brownien . . . . .	214
<b>Chapitre 12. Quelques applications classiques et un aperçu de la théorie du signal</b>	<b>217</b>
12.1. Retour à Fourier . . . . .	217
12.2. Les trois EDP classiques . . . . .	217
12.3. Deux problèmes extrémaux sur les courbes planes . . . . .	220

12.4. La formule sommatoire de Poisson, l'équation fonctionnelle de Riemann et l'échantillonnage à la Shannon . . . . .	223
12.5. Transformée de Fourier rapide (FFT : fast Fourier transform)	226
12.6. Un aperçu de la théorie du signal . . . . .	229
<b>Bibliographie</b>	<b>239</b>
<b>Index</b>	<b>257</b>

## Partie II. Ondelettes

par Pierre Gilles Lemarié-Rieusset

<b>Introduction. Les ondelettes : bref aperçu historique</b>	<b>269</b>
1. Jean Morlet et le début de la théorie des ondelettes (1982) . . . . .	269
2. Alex Grossmann et l'équipe de Marseille (1984) . . . . .	273
3. Yves Meyer et le triomphe de l'analyse harmonique (1985) . . . . .	275
4. Stéphane Mallat et la transformation en ondelettes rapide . . . . .	278
5. Ingrid Daubechies et les filtres RIF (1987) . . . . .	280
<b>Chapitre 0. Qu'est-ce qu'une ondelette ?</b>	<b>285</b>
0.1. Les ondelettes continues . . . . .	285
0.2. Frames (discrets) d'ondelettes . . . . .	288
0.3. Bases d'ondelettes . . . . .	289
0.4. Ondelettes et espaces fonctionnels . . . . .	291
<b>Chapitre 1. La notion de représentation en ondelettes</b>	<b>293</b>
1.1. Localisation temps-fréquence et inégalité de Heisenberg . . . . .	293
1.2. Familles presque orthogonales, frames et bases dans un espace de Hilbert . . . . .	298
1.3. Fenêtres de Fourier, ondelettes de Gabor et théorème de Balian-Low . . . . .	301
1.4. Les ondelettes de Morlet . . . . .	304
1.5. Analyse par ondelettes de la régularité globale . . . . .	308
1.6. Analyse par ondelettes de la régularité ponctuelle . . . . .	315
<b>Chapitre 2. Transformations en ondelettes discrètes</b>	<b>321</b>
2.1. Théorèmes d'échantillonnage pour la représentation en ondelettes de Morlet . . . . .	321
2.2. Le lemme des vaguelettes et autres résultats sur les espaces $H^s$ . . . . .	323

2.3. Démonstration du théorème d'échantillonnage régulier . . . . .	328
2.4. Démonstration du théorème d'échantillonnage irrégulier . . . . .	333
2.5. Quelques remarques sur les frames duaux . . . . .	335
2.6. Théorie des ondelettes et théorie moderne de Littlewood-Paley	338
<b>Chapitre 3. La structure d'une base d'ondelettes</b>	<b>341</b>
3.1. Espaces de fonctions invariants par translation . . . . .	342
3.2. La structure d'une base d'ondelettes . . . . .	353
3.3. Analyses multi-résolution. Définition et exemples . . . . .	359
3.4. Non-existence d'ondelettes régulières pour l'espace de Hardy $H^2$	362
<b>Chapitre 4. La théorie des filtres d'échelle</b>	<b>367</b>
4.1. Analyses multi-résolution, fonctions d'échelle et filtres d'échelle	367
4.2. Propriétés des filtres d'échelle . . . . .	370
4.3. Dérivées et primitives d'une fonction d'échelle régulière . . . . .	379
4.4. Fonctions d'échelle à support compact . . . . .	385
<b>Chapitre 5. Fonctions de Daubechies et autres exemples de fonctions d'échelle</b>	<b>395</b>
5.1. Fonctions d'échelle interpolantes . . . . .	395
5.2. Analyses multi-résolution orthogonales . . . . .	405
5.3. Fonctions splines : le cas des ondelettes splines orthogonales . . . . .	423
5.4. Ondelettes splines bi-orthogonales . . . . .	428
<b>Chapitre 6. Ondelettes et espaces fonctionnels</b>	<b>433</b>
6.1. Ondelettes bi-orthogonales et analyse fonctionnelle . . . . .	433
6.2. Ondelettes et espaces de Lebesgue . . . . .	438
6.3. $H^1$ et BMO . . . . .	448
6.4. Espaces de Lebesgue à poids . . . . .	454
6.5. Espaces de Besov . . . . .	456
6.6. Analyse locale . . . . .	464
<b>Chapitre 7. Ondelettes à plusieurs variables</b>	<b>467</b>
7.1. Ondelettes à plusieurs variables : description générale . . . . .	467
7.2. Existence des ondelettes multivariées . . . . .	472
7.3. Propriétés des ondelettes à plusieurs variables . . . . .	478

<b>Chapitre 8. Algorithmes</b>	<b>479</b>
8.1. La transformation en ondelettes continue . . . . .	479
8.2. L'algorithme de Mallat . . . . .	481
8.3. Ondelettes sur l'intervalle . . . . .	487
8.4. Formules de quadrature . . . . .	492
8.5. L'algorithme BCR . . . . .	495
8.6. Le « wavelet shrinkage » de Donoho . . . . .	498
<b>Chapitre 9. Extensions de la théorie des ondelettes</b>	<b>499</b>
9.1. Fonctions d'échelle multiples . . . . .	499
9.2. Les paquets d'ondelettes . . . . .	500
9.3. Bases de sinus locaux . . . . .	504
9.4. L'algorithme du « matching pursuit » . . . . .	509
<b>Chapitre 10. Exemples d'utilisation des ondelettes en analyse</b>	<b>513</b>
10.1. Ondelettes et para-produits . . . . .	513
10.2. Le théorème « div-curl » . . . . .	517
10.3. Les opérateurs de Calderón-Zygmund . . . . .	519
10.4. La fonction de Riemann . . . . .	524
<b>Bibliographie</b>	<b>527</b>
<b>Index</b>	<b>535</b>