

Table des matières

Avant-propos	2
Comment utiliser ce livre	1
§ 1. Énoncés	1
§ 2. Quelques notations	2
I. \mathbb{N} et \mathbb{Z}	
1 Ensembles et dénombrements	5
§ 1. Égalité et inclusion d'ensembles	5
§ 2. Réunion, intersection et différences	7
§ 3. Produit d'ensembles	11
§ 4. Applications	11
§ 5. Permutations et factorielles	15
§ 6. Symboles \sum , \prod , \cup et \cap	17
2 Binôme de Newton	25
§ 1. Point de vue ensembliste	25
§ 2. Définition par récurrence	27
§ 3. Triangle de Pascal	30
§ 4. Dénombrements de solutions d'équations et d'inéquations	32
§ 5. Généralisations	33
3 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	39
§ 1. Division euclidienne	39
§ 2. Tables d'additions et de multiplications	40
§ 3. Congruences	44
§ 4. Numération	47
4 Arithmétique dans \mathbb{N}	51
§ 1. Le théorème fondamental	51
§ 2. pgcd et ppcm	54
§ 3. Nombres premiers entre eux	56
§ 4. Calculs avec des fractions	57
§ 5. L'ensemble des nombres premiers est infini	59
5 Arithmétique dans \mathbb{Z}	61
§ 1. Diviseurs et multiples	61
§ 2. ppcm et pgcd	64
§ 3. Nombres premiers entre eux	69
§ 4. Nombres premiers	69
§ 5. Compléments	72

II. \mathbb{R} et \mathbb{C}	76
6 Ordre total dans \mathbb{R}	77
§ 1. Inférieur, supérieur	77
§ 2. Majorants, minorants, bornes d'un sous-ensemble de \mathbb{R}	79
§ 3. Intervalles	82
§ 4. Monotonie	85
§ 5. Fonctions affines par morceaux	90
7 Polynômes réels	95
§ 1. Fonctions polynomiales réelles	95
§ 2. Formule de Taylor	98
§ 3. Opérations	100
§ 4. Division euclidienne de polynômes	106
8 Équations dans \mathbb{C}	111
§ 1. $\mathbb{C} = \{a + ib; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	112
§ 2. Nombres complexes sous la forme trigonométrique	114
§ 3. $z^n = 1$	116
§ 4. $z^n = \alpha$	117
§ 5. Équation du second degré en z dans \mathbb{C}	118
§ 6. Équation du troisième degré en z dans \mathbb{C}	120
9 Fonctions polynomiales complexes	123
§ 1. Théorème fondamental de l'algèbre	123
§ 2. Décomposition des polynômes réels	126
§ 3. Propriétés « arithmétiques »	127
10 Approximations	131
§ 1. Représentation des nombres réels	131
§ 2. Résolution numérique de $f(x) = 0$	135
11 Une aventure numérique	139
§ 1. Puissances de 10	139
§ 2. L'exponentielle réelle	142
§ 3. L'exponentielle complexe et π	143
III. Géométrie	147
12 Géométrie classique plane	149
§ 1. Triangles rectangles	149
§ 2. Thalès	153
§ 3. Angles	155
§ 4. Arcs capables	161
13 Transformations ponctuelles planes	169
§ 1. Isométries	169
§ 2. Similitudes	177
§ 3. Inversion. Plan conforme	181
§ 4. Le plan projectif réel	186
§ 5. Le programme d'Erlangen de Felix Klein	189
14 Triangles, quadrangles et quadrilatères	193
§ 1. Relations de triangulation	193
§ 2. Inégalité triangulaire	195
§ 3. Centres d'un triangle	198
§ 4. Le quadrilatère complet	204

15 Barycentres	211	22 Calcul matriciel	333
§ 1. Observation d'un plan d'altitude 1 dans l'espace	212	§ 1. Ensembles de matrices	333
§ 2. Opérations sur les points et les vecteurs d'un plan P	214	§ 2. Calculs par blocs	340
§ 3. Calcul barycentrique dans un plan affine réel	217	§ 3. Applications linéaires	343
§ 4. Coordonnées barycentriques	219	§ 4. Solution approchée d'un système réel impossible	347
§ 5. Fonctions de Leibniz	221		
§ 6. Courbes de Bézier	221	23 Matrices carrées	351
		§ 1. $M_n(\mathbb{C})$	351
16 Géométrie vectorielle en dimension 2 ou 3	225	§ 2. Déterminant d'une matrice carrée	354
§ 1. Définitions des vecteurs en géométrie classique	225	§ 3. Calcul de A^{-1}	356
§ 2. Produit scalaire	228	§ 4. L'exponentielle de matrice	359
§ 3. Dimension 2 : déterminants et aires	230		
§ 4. Dimension 3 : déterminants et volumes	236	24 Changement de base dans \mathbb{C}^n	363
§ 5. Produit mixte et produit vectoriel	240	§ 1. Formules explicites	363
§ 6. Les vecteurs en physique et en mathématiques	242	§ 2. Matrice de passage	366
		§ 3. $GL_n(\mathbb{C})$	368
		§ 4. Orientations de \mathbb{R}^n	369
17 Le plan complexe. Trigonométrie	245		
§ 1. Le plan complexe. Rappels de trigonométrie	245	25 Dimensions	371
§ 2. Transformations ponctuelles et opérations dans \mathbb{C}	251	§ 1. Sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^n	371
§ 3. Droites	252	§ 2. Bases	378
§ 4. Cercles et arcs	253	§ 3. Images directes et réciproques de sous-espaces vectoriels	381
§ 5. Birapport de quatre nombres complexes	254	§ 4. Noyau et image	382
18 Algèbre géométrique	257	26 Rang	387
§ 1. Les règles de calcul	257	§ 1. Rang d'une application linéaire de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^m	387
§ 2. Produits de 2 vecteurs	260	§ 2. Rang d'une matrice	388
§ 3. Produit de trois vecteurs et algèbre de Grassmann	261	§ 3. Rang d'un système linéaire	394
§ 4. Symétries orthogonales et rotations	262	§ 4. Rang d'une famille finie de vecteurs	396
§ 5. Quaternions	264	§ 5. Méthodes de calcul de rangs	399
		§ 6. Résolution et discussion d'un système linéaire	402
19 Courbes et surfaces	267		
§ 1. Repérage d'un point (rappels)	267	27 Diagonalisation	405
§ 2. Courbes paramétrées et courbes	270	§ 1. Matrices diagonales et matrices triangulaires	405
§ 3. Surfaces paramétrées et surfaces	280	§ 2. Point de vue matriciel	409
§ 4. Équations cartésiennes	282	§ 3. Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme de \mathbb{C}^n	418
§ 5. Coniques	284	§ 4. Trace	421
		§ 5. Matrices normales	422
IV. Applications linéaires complexes	297	V. Structures algébriques	426
20 Systèmes linéaires	299	28 Relations d'équivalence	427
§ 1. Système de deux équations à deux inconnues	299	§ 1. Relations entre éléments de deux ensembles	427
§ 2. Systèmes linéaires de m équations à n inconnues	304	§ 2. Relations binaires entre éléments d'un ensemble	429
§ 3. Méthode de Gauss	308	§ 3. Équivalences, partitions et ensembles quotients	432
§ 4. Systèmes de Cramer	311	§ 4. Une construction des ensembles numériques	437
§ 5. Exercices	312	§ 5. Une remarque à propos de la composition des relations	439
21 Déterminants	315	29 Ordre	443
§ 1. Structure vectorielle de \mathbb{C}^n	315	§ 1. Ensembles ordonnés et applications croissantes	443
§ 2. Signature d'une permutation	318	§ 2. Majorants, minorants et bornes	448
§ 3. Définition et propriétés des déterminants	320	§ 3. Ordre total	454
§ 4. Calcul des déterminants	322		
§ 5. Systèmes de n équations linéaires à n inconnues	326		

30 Groupes	459	§ 4. Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	498
§ 1. Étude formelle	459	§ 5. L'anneau $K[X]$ des polynômes en X sur un corps commutatif K	498
§ 2. Les groupes \mathbb{Z} et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	469	§ 6. Corps de fractions	503
§ 3. Groupe symétrique	471	32 Algèbre linéaire	511
§ 4. Coloriages d'un cube	477	§ 1. La structure	511
§ 5. Symétries et groupes	480	§ 2. Un exemple fondamental	513
31 Anneaux et corps	485	§ 3. Sous-espaces vectoriels	516
§ 1. Structures	485	§ 4. Dimension	522
§ 2. Idéaux d'un anneau commutatif	489	§ 5. Endomorphismes	534
§ 3. Anneaux principaux	494		