

# Table des matières

Avant-propos . . . . .	2
Comment utiliser ce livre . . . . .	1
§ 1. Énoncés . . . . .	1
§ 2. Quelques notations . . . . .	2
<b>I. <math>\mathbb{N}</math> et <math>\mathbb{Z}</math></b>	
<b>1 Ensembles et dénombrements</b> . . . . .	<b>5</b>
§ 1. Égalité et inclusion d'ensembles . . . . .	5
§ 2. Réunion, intersection et différences . . . . .	7
§ 3. Produit d'ensembles . . . . .	11
§ 4. Applications . . . . .	11
§ 5. Permutations et factorielles . . . . .	15
§ 6. Symboles $\sum$ , $\prod$ , $\cup$ et $\cap$ . . . . .	17
<b>2 Binôme de Newton</b> . . . . .	<b>25</b>
§ 1. Point de vue ensembliste . . . . .	25
§ 2. Définition par récurrence . . . . .	27
§ 3. Triangle de Pascal . . . . .	30
§ 4. Dénombrements de solutions d'équations et d'inéquations . . . . .	32
§ 5. Généralisations . . . . .	33
<b>3 <math>\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}</math></b> . . . . .	<b>39</b>
§ 1. Division euclidienne . . . . .	39
§ 2. Tables d'additions et de multiplications . . . . .	40
§ 3. Congruences . . . . .	44
§ 4. Numération . . . . .	47
<b>4 Arithmétique dans <math>\mathbb{N}</math></b> . . . . .	<b>51</b>
§ 1. Le théorème fondamental . . . . .	51
§ 2. pgcd et ppcm . . . . .	54
§ 3. Nombres premiers entre eux . . . . .	56
§ 4. Calculs avec des fractions . . . . .	57
§ 5. L'ensemble des nombres premiers est infini . . . . .	59
<b>5 Arithmétique dans <math>\mathbb{Z}</math></b> . . . . .	<b>61</b>
§ 1. Diviseurs et multiples . . . . .	61
§ 2. ppcm et pgcd . . . . .	64
§ 3. Nombres premiers entre eux . . . . .	69
§ 4. Nombres premiers . . . . .	69
§ 5. Compléments . . . . .	72

<b>II. <math>\mathbb{R}</math> et <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>76</b>
<b>6 Ordre total dans <math>\mathbb{R}</math></b> . . . . .	<b>77</b>
§ 1. Inférieur, supérieur . . . . .	77
§ 2. Majorants, minorants, bornes d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ . . . . .	79
§ 3. Intervalles . . . . .	82
§ 4. Monotonie . . . . .	85
§ 5. Fonctions affines par morceaux . . . . .	90
<b>7 Polynômes réels</b> . . . . .	<b>95</b>
§ 1. Fonctions polynomiales réelles . . . . .	95
§ 2. Formule de Taylor . . . . .	98
§ 3. Opérations . . . . .	100
§ 4. Division euclidienne de polynômes . . . . .	106
<b>8 Équations dans <math>\mathbb{C}</math></b> . . . . .	<b>111</b>
§ 1. $\mathbb{C} = \{a + ib; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ . . . . .	112
§ 2. Nombres complexes sous la forme trigonométrique . . . . .	114
§ 3. $z^n = 1$ . . . . .	116
§ 4. $z^n = \alpha$ . . . . .	117
§ 5. Équation du second degré en $z$ dans $\mathbb{C}$ . . . . .	118
§ 6. Équation du troisième degré en $z$ dans $\mathbb{C}$ . . . . .	120
<b>9 Fonctions polynomiales complexes</b> . . . . .	<b>123</b>
§ 1. Théorème fondamental de l'algèbre . . . . .	123
§ 2. Décomposition des polynômes réels . . . . .	126
§ 3. Propriétés « arithmétiques » . . . . .	127
<b>10 Approximations</b> . . . . .	<b>131</b>
§ 1. Représentation des nombres réels . . . . .	131
§ 2. Résolution numérique de $f(x) = 0$ . . . . .	135
<b>11 Une aventure numérique</b> . . . . .	<b>139</b>
§ 1. Puissances de 10 . . . . .	139
§ 2. L'exponentielle réelle . . . . .	142
§ 3. L'exponentielle complexe et $\pi$ . . . . .	143
<b>III. Géométrie</b>	<b>147</b>
<b>12 Géométrie classique plane</b> . . . . .	<b>149</b>
§ 1. Triangles rectangles . . . . .	149
§ 2. Thalès . . . . .	153
§ 3. Angles . . . . .	155
§ 4. Arcs capables . . . . .	161
<b>13 Transformations ponctuelles planes</b> . . . . .	<b>169</b>
§ 1. Isométries . . . . .	169
§ 2. Similitudes . . . . .	177
§ 3. Inversion. Plan conforme . . . . .	181
§ 4. Le plan projectif réel . . . . .	186
§ 5. Le programme d'Erlangen de Felix Klein . . . . .	189
<b>14 Triangles, quadrangles et quadrilatères</b> . . . . .	<b>193</b>
§ 1. Relations de triangulation . . . . .	193
§ 2. Inégalité triangulaire . . . . .	195
§ 3. Centres d'un triangle . . . . .	198
§ 4. Le quadrilatère complet . . . . .	204

<b>15 Barycentres</b>	<b>211</b>	<b>22 Calcul matriciel</b>	<b>333</b>
§ 1. Observation d'un plan d'altitude 1 dans l'espace . . . . .	212	§ 1. Ensembles de matrices . . . . .	333
§ 2. Opérations sur les points et les vecteurs d'un plan $P$ . . . . .	214	§ 2. Calculs par blocs . . . . .	340
§ 3. Calcul barycentrique dans un plan affine réel . . . . .	217	§ 3. Applications linéaires . . . . .	343
§ 4. Coordonnées barycentriques . . . . .	219	§ 4. Solution approchée d'un système réel impossible . . . . .	347
§ 5. Fonctions de Leibniz . . . . .	221		
§ 6. Courbes de Bézier . . . . .	221	<b>23 Matrices carrées</b>	<b>351</b>
		§ 1. $M_n(\mathbb{C})$ . . . . .	351
<b>16 Géométrie vectorielle en dimension 2 ou 3</b>	<b>225</b>	§ 2. Déterminant d'une matrice carrée . . . . .	354
§ 1. Définitions des vecteurs en géométrie classique . . . . .	225	§ 3. Calcul de $A^{-1}$ . . . . .	356
§ 2. Produit scalaire . . . . .	228	§ 4. L'exponentielle de matrice . . . . .	359
§ 3. Dimension 2 : déterminants et aires . . . . .	230		
§ 4. Dimension 3 : déterminants et volumes . . . . .	236	<b>24 Changement de base dans <math>\mathbb{C}^n</math></b>	<b>363</b>
§ 5. Produit mixte et produit vectoriel . . . . .	240	§ 1. Formules explicites . . . . .	363
§ 6. Les vecteurs en physique et en mathématiques . . . . .	242	§ 2. Matrice de passage . . . . .	366
		§ 3. $GL_n(\mathbb{C})$ . . . . .	368
		§ 4. Orientations de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	369
<b>17 Le plan complexe. Trigonométrie</b>	<b>245</b>		
§ 1. Le plan complexe. Rappels de trigonométrie . . . . .	245	<b>25 Dimensions</b>	<b>371</b>
§ 2. Transformations ponctuelles et opérations dans $\mathbb{C}$ . . . . .	251	§ 1. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ . . . . .	371
§ 3. Droites . . . . .	252	§ 2. Bases . . . . .	378
§ 4. Cercles et arcs . . . . .	253	§ 3. Images directes et réciproques de sous-espaces vectoriels . . . . .	381
§ 5. Birapport de quatre nombres complexes . . . . .	254	§ 4. Noyau et image . . . . .	382
<b>18 Algèbre géométrique</b>	<b>257</b>	<b>26 Rang</b>	<b>387</b>
§ 1. Les règles de calcul . . . . .	257	§ 1. Rang d'une application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$ . . . . .	387
§ 2. Produits de 2 vecteurs . . . . .	260	§ 2. Rang d'une matrice . . . . .	388
§ 3. Produit de trois vecteurs et algèbre de Grassmann . . . . .	261	§ 3. Rang d'un système linéaire . . . . .	394
§ 4. Symétries orthogonales et rotations . . . . .	262	§ 4. Rang d'une famille finie de vecteurs . . . . .	396
§ 5. Quaternions . . . . .	264	§ 5. Méthodes de calcul de rangs . . . . .	399
		§ 6. Résolution et discussion d'un système linéaire . . . . .	402
<b>19 Courbes et surfaces</b>	<b>267</b>		
§ 1. Repérage d'un point (rappels) . . . . .	267	<b>27 Diagonalisation</b>	<b>405</b>
§ 2. Courbes paramétrées et courbes . . . . .	270	§ 1. Matrices diagonales et matrices triangulaires . . . . .	405
§ 3. Surfaces paramétrées et surfaces . . . . .	280	§ 2. Point de vue matriciel . . . . .	409
§ 4. Équations cartésiennes . . . . .	282	§ 3. Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ . . . . .	418
§ 5. Coniques . . . . .	284	§ 4. Trace . . . . .	421
		§ 5. Matrices normales . . . . .	422
<b>IV. Applications linéaires complexes</b>	<b>297</b>	<b>V. Structures algébriques</b>	<b>426</b>
<b>20 Systèmes linéaires</b>	<b>299</b>	<b>28 Relations d'équivalence</b>	<b>427</b>
§ 1. Système de deux équations à deux inconnues . . . . .	299	§ 1. Relations entre éléments de deux ensembles . . . . .	427
§ 2. Systèmes linéaires de $m$ équations à $n$ inconnues . . . . .	304	§ 2. Relations binaires entre éléments d'un ensemble . . . . .	429
§ 3. Méthode de Gauss . . . . .	308	§ 3. Équivalences, partitions et ensembles quotients . . . . .	432
§ 4. Systèmes de Cramer . . . . .	311	§ 4. Une construction des ensembles numériques . . . . .	437
§ 5. Exercices . . . . .	312	§ 5. Une remarque à propos de la composition des relations . . . . .	439
<b>21 Déterminants</b>	<b>315</b>	<b>29 Ordre</b>	<b>443</b>
§ 1. Structure vectorielle de $\mathbb{C}^n$ . . . . .	315	§ 1. Ensembles ordonnés et applications croissantes . . . . .	443
§ 2. Signature d'une permutation . . . . .	318	§ 2. Majorants, minorants et bornes . . . . .	448
§ 3. Définition et propriétés des déterminants . . . . .	320	§ 3. Ordre total . . . . .	454
§ 4. Calcul des déterminants . . . . .	322		
§ 5. Systèmes de $n$ équations linéaires à $n$ inconnues . . . . .	326		

<b>30 Groupes</b>	<b>459</b>	§ 4. Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	498
§ 1. Étude formelle	459	§ 5. L'anneau $K[X]$ des polynômes en $X$ sur un corps commutatif $K$	498
§ 2. Les groupes $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	469	§ 6. Corps de fractions	503
§ 3. Groupe symétrique	471	<b>32 Algèbre linéaire</b>	<b>511</b>
§ 4. Coloriages d'un cube	477	§ 1. La structure	511
§ 5. Symétries et groupes	480	§ 2. Un exemple fondamental	513
<b>31 Anneaux et corps</b>	<b>485</b>	§ 3. Sous-espaces vectoriels	516
§ 1. Structures	485	§ 4. Dimension	522
§ 2. Idéaux d'un anneau commutatif	489	§ 5. Endomorphismes	534
§ 3. Anneaux principaux	494		