

Table des matières

Préface	vii
Auteurs et rédacteurs	ix
Leçon 1. Gilles Godefroy. De l'irrationalité à l'indécidabilité	1
Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre	1
La suite de Fibonacci	10
Du paradis que Cantor a créé pour nous...	12
Le programme de Hilbert	23
Le vertige contemporain	25
Le théorème de Gödel	25
Ensembles récursivement énumérables et ensembles ré- cursifs	28
Le théorème de Robinson-Matijasevic	31
Bibliographie	36
Leçon 2. Jean-Yves Girard. La théorie de la démonstration, du programme de Hilbert à la logique linéaire	37
La « crise des fondements »	37
La théorie naïve des ensembles : grandeur et décadence .	37
Une crise de quoi ?	39
Le programme de Hilbert	40
Un chevalier blanc et une ontologie	40
Le programme : un principe de conservation	43
La chute	44
Immersion	44
Le(s) théorème(s) d'incomplétude de Gödel	45
L'obstination	48
Gentzen	48
Avatars du théorème de Gödel	50
Le <i>Hauptsatz</i>	52
Toutes les mauvaises idées ne sont pas à jeter	52
Les séquents	53

L'élimination des coupures (le <i>Hauptsatz</i>)	59
Idée de la preuve	61
Corollaires du <i>Hauptsatz</i>	64
La cohérence de l'arithmétique de Peano	64
La propriété de la sous-formule, et la programmation logique	65
La contraction coupable	67
La logique intuitionniste	68
Don Camillo contre Peppone	68
Le <i>Hauptsatz</i> et la propriété de la disjonction	69
La lecture moderne de l'intuitionnisme	71
L'interprétation fonctionnelle	72
La sémantique des preuves	72
Le λ -calcul typé et l'isomorphisme de Curry-Howard	73
Le paradigme de programmation fonctionnelle	76
La nature des fonctions	77
Une interprétation linéaire	77
Le calcul des séquents linéaire	79
Interprétation intuitive des connecteurs linéaires	82
Les réseaux de démonstration	88
Réseaux	88
Le critère de correction	90
Normalisation des réseaux	92
Analogie électrique	94
Des règles de la logique à la logique des règles	95
La dualité	95
La ludique	97
Le pourquoi et le comment	97
Bibliographie	98
Leçon 3. Gérald Tenenbaum. Qu'est-ce qu'un entier normal ?	101
Nombres premiers et entiers au hasard	101
Densités	103
Conflit structural	104
De Hardy-Ramanujan à Erdős-Kac	105
Le modèle d'Erdős-Kubilius	108
Un objet fractal	111
Les limites du modèle d'Erdős-Kubilius	112
Un modèle plus précis	115

Exploitation heuristique du nouveau modèle	116
Un point de vue « extérieur » sur la normalité : les suites de Behrend	119
Transformées de Fourier de fonctions arithmétiques	122
Sommes d'exponentielles	124
Limitation théorique : un principe d'incertitude	127
En guise de conclusion	127
Questions	129
Bibliographie	130

Leçon 4. François Morain. La cryptologie est-elle soluble dans les mathématiques ?	133
Introduction : cryptographie, cryptanalyse, cryptologie	133
Cryptographie symétrique	134
Cryptographie asymétrique	138
Le principe	138
Quels problèmes choisir?	139
Sécurité d'un système	140
Le chiffrement RSA	141
Le principe	141
Une première approche de la sécurité de RSA : le pro- blème de la factorisation	142
L'échange de clés de Diffie-Hellman	148
Le principe	148
Une approche de la sécurité de l'échange : difficulté du problème du logarithme discret	149
Vers des preuves de sécurité	158
Conclusion	161
Bibliographie	162

Leçon 5. Michel Waldschmidt. Fonctions modulaires et transcen- dante	167
Le théorème de Liouville	167
Le nombre ξ	169
Exemples naturels de transcendance et d'indépendance algé- brique	171
Fonctions thêta et modulaires	173
Fonctions elliptiques	176

Transcendance des valeurs des fonctions modulaires <i>via</i> les fonctions elliptiques	178
Le théorème stéphanois et les théorèmes de Nesterenko	181
Problèmes ouverts	185
Questions	192
Bibliographie	195
Leçon 6. Guy David. Ensembles uniformément rectifiables	197
Introduction	197
Rectifiabilité uniforme	199
Un critère particulier : inégalité de Poincaré (ou de Sobolev) dans le complémentaire	208
Un exemple d'application : la fonctionnelle de Mumford-Shah en traitement d'images	209
Quoi de neuf depuis la Leçon ?	212
Bibliographie	213
Leçon 7. Claude Bardos. Observation à hautes et basses fréquences, contrôlabilité, décroissance locale de l'énergie et mesures de dé- faut	215
Le problème de la détection	215
L'observation et sa stabilité	215
Hautes fréquences : optique géométrique	216
Basses fréquences : diffraction	220
Mathématisation	221
Notations	221
Le problème de l'observation (ou de l'unicité)	222
Le problème de l'observation stable	222
Applications	224
Contrôlabilité exacte	224
Stabilisation	225
Scattering	225
Quelques résultats	226
1. Scattering. La conjecture de Lax et Phillips	226
2. Stabilisation	227
D'un problème à l'autre.	228
Retour sur l'intrus caché.	229
<i>Le cas analytique.</i>	229
<i>Au-delà du cas analytique.</i>	230

La stratégie de la preuve du théorème de l'observation stable	232
Étape 1 : traduction géométrique	232
Étape 2 : estimations élémentaires et mesures de défaut	236
Étape 3 : relations entre les mesures μ et ν	238
Étape 4. Propagation de la mesure au voisinage des points glissants	241
Esquisse de la preuve de Robbiano	244
Conclusions	245
Postface (par Claude Bardos)	245
Bibliographie	247
Leçon 8. Max Karoubi. Topologie et formes différentielles	251
Quelques rappels classiques : formes différentielles, cohomologie de de Rham, lien avec la topologie, et un problème ouvert	251
Formes différentielles	251
L'algèbre différentielle graduée $\Omega^*(X)$	252
Lemme de Poincaré et cohomologie de de Rham	253
Lien avec la topologie : $H^1(X)$ et $\pi_1(X)$	255
Les groupes d'homotopie supérieurs $\pi_n(X)$, $n > 1$	256
La théorie de Quillen-Sullivan	258
Les algèbres différentielles graduées (ADG) et leurs quasi- isomorphismes	258
Le théorème de Quillen-Sullivan sur \mathbb{R}	259
Passer des réels aux rationnels	260
Réduction du problème aux complexes simpli- ciaux (triangulation).	260
Les formes différentielles sur un complexe simpli- cial, et le théorème de Quillen-Sullivan sur \mathbb{Q}	261
Passer de \mathbb{Q} à \mathbb{Z}	262
Cohomologie à coefficients entiers et théorie de Quillen- Sullivan tressée	263
Un calcul différentiel non commutatif	263
Cohomologie tressée d'un complexe simplicial	264
ADG tressées	266
Lien avec la topologie	268
Bibliographie	270

Leçon 9. Jean-Marc Fontaine. Nombres p-adiques, représentations galoisiennes et applications arithmétiques	271
Nombres p -adiques	271
Représentations galoisiennes	276
Exemples de représentations galoisiennes	280
Cohomologie de de Rham et structures de Hodge	285
Structures de Hodge p -adiques	287
Représentations ℓ -adiques géométriques	292
Bibliographie	297
Leçon 10. Marc Hindry. Géométrie et équations diophantiennes	301
Introduction	301
Hauteur sur l'espace projectif	302
Estimation du nombre de points de hauteur donnée par des constructions géométriques usuelles.	304
Invariants géométriques et nombre de points rationnels	305
Diviseurs, groupe de Picard	305
Hauteur associée à un diviseur	306
Formes différentielles ; diviseur canonique	307
Cas des courbes projectives lisses	309
Et en dimension supérieure?	311
Le nombre de points rationnels de hauteur bornée	313
Remarques supplémentaires	315
Bibliographie	315
Leçon 11. Michel Raynaud. Courbes algébriques et groupe fondamental	317
Surfaces (point de vue topologique)	317
Tores, surfaces compactes, genre	317
Le groupe fondamental (point de vue topologique)	320
Première définition (point de vue des lacets).	320
Deuxième définition (point de vue galoisien).	321
Surfaces de Riemann	323
Passage au point de vue algébrique	324
Courbes algébriques sur \mathbb{C} . Le groupe fondamental algébrique	324
Courbes algébriques sur un corps algébriquement clos	328
Courbes en caractéristique nulle	329

Cadre arithmétique	330
Courbes en caractéristique positive	331
La courbe générique	336
Appendice	340
Minilexique	340
Bibliographie	343
Leçon 12. Michael S. Keane. Marches aléatoires renforcées	347
Les probabilités classiques	347
L'apport de Markov	348
Processus non markoviens : une mémoire d'éléphant	349
Le bar ou la plage : l'émergence des opinions	350
Retour inattendu à Markov	352
Marches aléatoires classiques	354
Autres problèmes	357
Questions	359
Bibliographie	360