

## Table des matières

<b>Préface</b>	<b>vii</b>
<b>Auteurs et rédacteurs</b>	<b>xix</b>
<b>Leçon 1. Benoît Perthame. Quelques équations de transport apparaissant en biologie</b>	<b>1</b>
Introduction : aspects des mathématiques en biologie . . . .	1
Équations différentielles ordinaires . . . . .	2
Dynamique des populations : équations de Malthus (1798) et de Verhulst (1838) . . . . .	2
Proies et prédateurs : le modèle de Lotka-Volterra (1925-1926) . . . . .	3
Équations aux dérivées partielles . . . . .	5
Diffusion avec reproduction : Fisher et KPP (1937) . . . .	5
Turing et les rayures du zèbre (1952) . . . . .	7
Plan de l'exposé . . . . .	7
Un pas dans la théorie de l'évolution . . . . .	10
Un exemple de sélection naturelle . . . . .	10
Mutations . . . . .	11
Populations structurées et équations aux dérivées partielles .	13
Vieillesse des populations : équation de McKendrick (1926) et von Fœrster (1959) . . . . .	13
Transposition du modèle aux cycles cellulaires . . . . .	15
Mouvements cellulaires : le modèle chimiotactique de Keller-Segel (1970) . . . . .	17
La chimiotaxie . . . . .	17
Le modèle de Keller-Segel . . . . .	17
Dimension 2. $L^1$ est l'espace critique . . . . .	19
Dimension 3. $L^{3/2}$ est l'espace critique . . . . .	20
Une idée de la preuve des théorèmes d'existence . . . . .	20
Points d'explosion . . . . .	21
Ondes progressives . . . . .	23

Aspect mésoscopique : le modèle de Othmer-Dunbar-Alt (1988) pour les déplacements d' <i>Escherichia Coli</i> . . . . .	23
L'amorce de l'angiogenèse . . . . .	26
La vasculogenèse . . . . .	28
Questions . . . . .	30
Bibliographie . . . . .	31
<b>Leçon 2. Jeffrey Rauch. À travers un prisme</b>	<b>35</b>
Introduction . . . . .	35
Une description purement géométrique de la propagation des ondes . . . . .	36
La loi de la réfraction et le principe de Fermat . . . . .	36
Le modèle des rangées de soldats . . . . .	38
La construction de Huygens et l'équation eikonale . . . . .	42
Acoustique . . . . .	45
L'équation de d'Alembert . . . . .	45
Lien avec la construction de Huygens . . . . .	47
Oscillations rapides : l' <i>ansatz</i> BKW . . . . .	49
Lien avec l'équation eikonale ; rayons et termes correcteurs . . . . .	52
Stabilité de la solution approchée, et récapitulation . . . . .	54
Explication de la réfraction en acoustique . . . . .	55
Électromagnétisme . . . . .	56
Équations de Maxwell et équations d'ondes . . . . .	56
Polarisation : modèle diélectrique . . . . .	57
Polarisation oscillante et explication de la dispersion . . . . .	60
Appendice : une loi « de Snell » modifiée pour le modèle des rangées de soldats . . . . .	63
Bibliographie . . . . .	66
<b>Leçon 3. Nicole El Karoui. Gestion des risques financiers dans un monde dynamique</b>	<b>69</b>
Introduction . . . . .	69
L'industrie du risque financier . . . . .	70
Les produits dérivés . . . . .	73
Théorie de l'évaluation et de la couverture des produits dérivés . . . . .	75
La thèse de Bachelier et le mouvement brownien . . . . .	75
L'idée de Black, Scholes et Merton . . . . .	77
La modélisation mathématique . . . . .	79

Formule différentielle d'Itô . . . . .	82
Valeur de l'option et couverture . . . . .	83
La formule de Black et Scholes . . . . .	85
Implémentation de la formule de Black-Scholes, estimation de la volatilité . . . . .	87
La volatilité historique (ou statistique) . . . . .	88
La volatilité implicite et la stratégie de couverture . . . . .	89
Les <i>smiles</i> et l'équation de Dupire . . . . .	91
Un problème inverse mal posé. La méthode de calibra- tion par les prix de Lagnado et Osher . . . . .	95
Petites maturités . . . . .	96
Un problème de contrôle stochastique . . . . .	96
Méthodes numériques probabilistes. Monte-Carlo . . . . .	98
La spécificité des mathématiques financières . . . . .	99
Questions . . . . .	99
Bibliographie . . . . .	101

#### **Leçon 4. Marc Yor. Le mouvement brownien : une martingale exceptionnelle et néanmoins générique**

103

Comment caractériser et étudier le mouvement brownien ? . . . . .	103
Le mouvement brownien en tant que processus gaussien . . . . .	104
Le mouvement brownien en tant que processus à ac- croissements indépendants homogènes : proces- sus de Lévy . . . . .	104
Le mouvement brownien en tant que processus de Markov . . . . .	104
Le mouvement brownien en tant que martingale . . . . .	105
Définition du mouvement brownien relativement à une filtra- tion . . . . .	107
Une martingale continue est un mouvement brownien changé de temps . . . . .	110
Le théorème de Dambis, Dubins et Schwarz (DDS) . . . . .	110
Illustration avec les fonctions holomorphes . . . . .	111
Martingales pures, martingales d'Ocone . . . . .	113
Martingales extrémales . . . . .	114
Caractérisation des points extrémaux de $\mathcal{M}$ . . . . .	114
Une esquisse de classification : martingales extrémales, pures, d'Ocone . . . . .	116
La décomposition de $L^2(\mathcal{B}_\infty)$ en chaos de Wiener et ses géné- ralisations . . . . .	119

La décomposition chaotique du mouvement brownien	119
Un autre exemple de décomposition chaotique : le processus de Poisson compensé	121
Les martingales unitaires	122
Les martingales d'Azéma	123
La filtration brownienne, cette inconnue	125
Caractériser la filtration brownienne?	125
L'araignée brownienne	127
Changements de probabilités	129
Questions	130
Appendice : quelques résultats essentiels de théorie des martingales	131
Bibliographie	135
<b>Leçon 5. Wendelin Werner. Lacets et invariance conforme</b>	<b>139</b>
Introduction : un exemple de percolation	139
Choisir un chemin au hasard dans le plan	143
Chemins autoévitants	147
L'unique candidat pour la mesure sur les lacets autoévitants	149
Intérieur et extérieur	153
Retour sur la percolation	155
Interfaces, processus de Schramm-Loewner	156
Exposants critiques	160
Questions	163
Bibliographie	164
<b>Leçon 6. Xavier Viennot. Énumérons ! De la combinatoire énumérative classique aux nouvelles combinatoires : bijective, algébrique, expérimentale, quantique et... magique!</b>	<b>165</b>
Combinatoire énumérative	165
Quelques souvenirs d'école : le « triangle de Pascal », les permutations, les dérangements	165
Les matrices à signes alternants	167
Les nombres de Catalan	168
L'énigme des nombres d'Hipparque	172
Comment passer de la définition combinatoire à l'équation fonctionnelle	175
Combinatoire bijective	178
Preuves bijectives	179

Objets combinatoires valués . . . . .	182
Interprétation d'objets combinatoires . . . . .	185
Le paradigme bijectif . . . . .	191
Combinatoire algébrique . . . . .	192
Représentations irréductibles des groupes et tableaux de Young standards . . . . .	192
Correspondance de Robinson-Schensted et jeu de taquin	195
Fonctions de Schur et algèbre plaxique . . . . .	197
Les déterminants et les chemins qui ne se coupent pas .	200
Polynôme de Jones . . . . .	206
Différences divisées, polynômes de Schubert, Fomin- Kirillov . . . . .	210
Deux tours de force : partitions planes et matrices à signes alternants . . . . .	214
Dix formules : un produit divisé par un produit . . . . .	214
TSSCPP . . . . .	215
De TSSCPP aux matrices à signes alternants . . . . .	218
Résolution combinatoire d'équations différentielles . . . . .	220
Combinatoire et physique statistique . . . . .	222
Animaux dirigés . . . . .	222
Les hexagones durs . . . . .	224
La théorie des champs bidimensionnelle . . . . .	226
Appendice : dix problèmes ouverts . . . . .	228
Note ajoutée en mai 2006, par X. Viennot . . . . .	232
Bibliographie . . . . .	235

<b>Leçon 7. Bernard Teissier. Volumes des corps convexes, géomé-</b>	
<b>trie et algèbre</b>	<b>239</b>
Résumé . . . . .	239
Le problème isopérimétrique . . . . .	239
Didon . . . . .	239
Bonnesen . . . . .	243
Généralisations : volumes mixtes et problèmes de comptage	245
Trois types de questions . . . . .	245
Théorème de Minkowski-Steiner . . . . .	246
Inégalité isopérimétrique généralisée et formule de Pick (dimension 2) . . . . .	246
Comptage . . . . .	247

Les volumes mixtes en dimension $d$ . Formules de Crofton et de Cauchy. Inégalités de Alexandrov-Fenchel et théorème d'Hadwiger . . . . .	248
Formules de Crofton et de Cauchy . . . . .	248
Inégalités entre les volumes mixtes . . . . .	253
Valuations et volumes mixtes . . . . .	256
Nombres de faces d'un polytope simplicial dans $\mathbb{R}^d$ . Équations de Dehn-Sommerville . . . . .	259
Le problème du comptage des points entiers en dimension $d$ . Polynôme d'Ehrhart . . . . .	261
Liens avec la géométrie algébrique . . . . .	262
Théorèmes de Carathéodory et de Briançon-Skoda. . . . .	263
Bibliographie . . . . .	266
<b>Leçon 8. Dominique Cerveau. Champs d'hyperplans</b>	<b>269</b>
Premiers exemples. Principe d'accessibilité de Carathéodory	269
La forme de contact . . . . .	269
Le principe d'accessibilité de Carathéodory . . . . .	270
Un second exemple . . . . .	272
Intégrabilité . . . . .	273
Loin du principe d'accessibilité . . . . .	273
Le théorème de Frobenius (1877) . . . . .	274
Exemple : l'équation du tourbillon . . . . .	275
Constructions de champs d'hyperplans . . . . .	276
Divers exemples . . . . .	276
Un exemple de Cayley . . . . .	277
Singularités . . . . .	277
Dimension 2 . . . . .	277
Dimension 3 . . . . .	280
Étude d'un exemple . . . . .	282
Présentation de l'exemple . . . . .	282
Groupe d'holonomie . . . . .	283
Adhérences des orbites . . . . .	287
Cas général : quelques types d'adhérences de feuilles . . . . .	287
Exemples . . . . .	287
Le théorème de Camacho-Sad (1980) . . . . .	288
Groupes de difféomorphismes . . . . .	289
Groupes non résolubles. Alternative de Nakai (1994) . . . . .	289
Groupes résolubles . . . . .	289

Théorie de Galois des feuilletages, intégrabilité liouvillienne	290
En dimension supérieure ou égale à trois . . . . .	291
Une alternative . . . . .	291
Le « théorème de Frobenius singulier » (Malgrange, 1976)	292
Feuilletages sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . . . . .	293
Théorème de Chow pour les feuilletages . . . . .	293
Feuilletages de degré 0 . . . . .	294
Feuilletages de degré 1 . . . . .	295
Dynamique d'un feuilletage de degré 2 . . . . .	297
Composantes irréductibles de l'espace des feuilletages . . . .	298
Composantes logarithmiques . . . . .	298
Composantes « pull-back » . . . . .	299
Classification complète . . . . .	300
Bibliographie . . . . .	302

<b>Leçon 9. Fabien Morel. Groupes d'homotopie de sphères algébriques et formes quadratiques</b>	<b>305</b>
Groupes d'homotopie classiques . . . . .	305
Groupes d'homotopie des sphères . . . . .	306
Degré de Brouwer . . . . .	307
Définition . . . . .	307
Exemple fondamental. Du degré aux formes quadratiques	308
Variétés algébriques . . . . .	310
Ouverts affines . . . . .	310
Variétés algébriques. Exemple fondamental : $\mathbb{P}_k^1$ . . . . .	312
Degré des morphismes de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$ . . . . .	314
Les morphismes de $\mathbb{P}^1$ dans lui-même . . . . .	314
Valeurs régulières . . . . .	314
Degré . . . . .	315
L'anneau de Grothendieck-Witt . . . . .	317
L'homotopie stable des sphères . . . . .	318
Le problème. Existence d'une solution univoque . . . .	318
Les sphères bigraduées . . . . .	320
Groupes d'homotopie stable des sphères . . . . .	321
Bibliographie . . . . .	324

<b>Leçon 10. Pierre Berthelot. Points rationnels des variétés algébriques sur les corps finis : l'approche <math>p</math>-adique</b>	<b>325</b>
Variétés algébriques sur un corps fini. Fonction zêta . . . . .	326
Rappels sur les corps finis . . . . .	326
Sous-variétés algébriques de l'espace affine $\mathbb{A}_k^n$ . . . . .	327
Topologie de Zariski et faisceau des fonctions régulières	328
Variétés affines abstraites et variétés algébriques. Points rationnels . . . . .	328
Fonction zêta . . . . .	329
Rapport avec la fonction zêta de Riemann . . . . .	330
Les conjectures de Weil . . . . .	331
La stratégie de Weil . . . . .	334
Une formule de Lefschetz . . . . .	334
Les propriétés attendues d'une cohomologie de Weil . . . . .	334
Ouverture de la chasse . . . . .	336
La méthode de Dwork pour la rationalité de $Z(X, t)$ . . . . .	337
Nombres $p$ -adiques . . . . .	337
Boule unité $p$ -adique et corps résiduel . . . . .	339
L'exponentielle $p$ -adique . . . . .	339
Le plan $p$ -adique $C_p$ et la démonstration de Dwork . . . . .	340
Description de $\Delta(t)$ dans le cas projectif . . . . .	342
À la recherche des cohomologies $p$ -adiques . . . . .	344
Cohomologie de Dwork pour les hypersurfaces . . . . .	344
Intermède : cohomologie de de Rham des variétés complexes . . . . .	345
Cohomologie de Monsky-Washnitzer . . . . .	346
Cohomologie cristalline . . . . .	348
Cohomologie rigide . . . . .	350
Retour aux sources, et conclusion . . . . .	353
Bibliographie . . . . .	354
<b>Leçon 11. Bruno Kahn. Motifs</b>	<b>359</b>
Introduction . . . . .	359
Construction des motifs . . . . .	360
Conjectures de Weil . . . . .	361
Cohomologies de Weil classiques . . . . .	362
Cohomologie motivique . . . . .	364
Relations d'équivalence adéquates . . . . .	366
Correspondances . . . . .	368

Catégorie des correspondances . . . . .	369
Catégorie des motifs effectifs . . . . .	370
Catégorie des motifs . . . . .	372
Conjectures standard . . . . .	374
Motivation . . . . .	374
Théorie de Galois motivique . . . . .	376
Deux conjectures standard . . . . .	377
Conjecture B . . . . .	381
Contournement des conjectures standard . . . . .	382
Motifs mixtes . . . . .	385
Deux applications . . . . .	385
Conjecture de Tate et conjecture de Beilinson . . . . .	386
Nombre de points modulo $q$ sur $\mathbb{F}_q$ . . . . .	387
Bibliographie . . . . .	388

## **Leçon 12. Laurent Lafforgue. Formules de traces et programme de Langlands**

<b>de Langlands</b>	<b>391</b>
Complétions d'un corps global . . . . .	391
Le cas des corps de fonctions . . . . .	391
Le cas des corps de nombres . . . . .	392
La formule du produit . . . . .	393
L'anneau des adèles d'un corps global. . . . .	394
Représentations automorphes . . . . .	395
La décomposition spectrale de Langlands . . . . .	397
Un accès aux représentations automorphes : la formule des traces d'Arthur-Selberg . . . . .	398
Décomposition en facteurs locaux . . . . .	401
L'isomorphisme de Satake . . . . .	401
Le groupe dual de Langlands . . . . .	402
Paramètres de Langlands . . . . .	404
Fonctions L . . . . .	404
Le principe de fonctorialité . . . . .	405
Cas particuliers du principe de fonctorialité . . . . .	406
(1) Transfert vers la forme quasi-déployée . . . . .	406
(2) Transferts des groupes classiques . . . . .	407
(3) Produit tensoriel automorphe . . . . .	407
(4) Puissances symétriques . . . . .	408
(5) Changement de base automorphe . . . . .	408
(6) Induction automorphe . . . . .	409

(7) La conjecture d'Artin forte . . . . .	410
La correspondance de Langlands . . . . .	411
Cas particuliers de la fonctorialité accessibles par la formule des traces : théorie de l'endoscopie. . . . .	412
Formule des traces d'Arthur-Selberg, formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz, et correspondance de Lan- glands . . . . .	414
Bibliographie . . . . .	415
<b>Table des matières du volume 1</b>	<b>417</b>
<b>Table des matières du volume 2</b>	<b>421</b>