

## Table des matières

<b>Préface</b>	<b>vii</b>
<b>Auteurs et rédacteurs</b>	<b>xv</b>
<b>Leçon 1. Jonathan Keating. Les matrices aléatoires et la fonction <math>\zeta</math> de Riemann</b>	<b>1</b>
Introduction . . . . .	1
Zéros de la fonction $\zeta$ et matrices aléatoires . . . . .	1
Quelques rappels sur la fonction $\zeta$ . . . . .	1
La répartition des zéros . . . . .	3
Un peu d’histoire sur les matrices aléatoires . . . . .	4
La répartition des valeurs propres et la conjecture de Montgomery . . . . .	6
Mise en évidence numérique . . . . .	11
Matrices aléatoires et valeurs de $\zeta$ sur la droite critique . . . . .	13
Distribution de $\log \zeta(\frac{1}{2} + it)$ . . . . .	14
Distribution de $ \zeta $ sur la droite critique . . . . .	17
Matrices aléatoires et distribution de $\zeta$ . . . . .	19
Matrices aléatoires et fonctions L . . . . .	28
Questions . . . . .	30
Bibliographie . . . . .	31
<b>Leçon 2. Persi Diaconis. Addition, mélange de cartes et fonctions symétriques</b>	<b>33</b>
L’addition et les retenues . . . . .	33
Mélange de cartes . . . . .	37
Le lien entre le mélange des cartes et les retenues . . . . .	43
Liens avec la combinatoire algébrique . . . . .	47
Bibliographie . . . . .	56
<b>Leçon 3. Jürg Fröhlich. Quelques aspects des mathématiques de la mécanique quantique</b>	<b>57</b>
Introduction . . . . .	57

Des révolutions dans la physique entre 1900 et 1930 . . . . .	58
Un point de vue mathématique : la théorie des déformations	61
Structure atomique de la matière vue comme résultat d'une déformation d'une mécanique de milieux continus . . . .	62
Résumé . . . . .	71
Qu'est-ce qu'un système physique? Théories réalistes et théories quantiques. . . . .	72
Les théories réalistes (« classiques ») . . . . .	74
Les théories quantiques . . . . .	76
Impossibilité d'une interprétation déterministe de la méca- nique quantique . . . . .	78
Quelques notions fondamentales et quelques questions à propos de la mécanique quantique . . . . .	82
Calcul de probabilités quantiques . . . . .	85
Questions . . . . .	89
Bibliographie . . . . .	90
<b>Leçon 4. François Loeser. De l'intégration <math>p</math>-adique à l'intégra- tion motivique</b>	<b>93</b>
De l'intégration $p$ -adique... . . . . .	93
Les nombres $p$ -adiques . . . . .	93
Applications des nombres $p$ -adiques . . . . .	97
... à l'intégration motivique . . . . .	105
Bibliographie . . . . .	108
<b>Leçon 5. Mikhail Zaidenberg. Deux essais sur la géométrie affine</b>	<b>111</b>
Couples de polynômes d'une variable. . . . .	111
Courbes planes simplement connexes. . . . .	116
Courbes planes simplement connexes lisses. . . . .	116
Courbes simplement connexes singulières. . . . .	118
Bibliographie . . . . .	130
<b>Leçon 6. Arnaud Beauville. La théorie de Hodge et quelques applications</b>	<b>133</b>
Introduction . . . . .	133
Un peu d'histoire . . . . .	133
Cohomologie entière . . . . .	134
Cohomologie de de Rham . . . . .	135
Variétés complexes . . . . .	136

Structures de Hodge . . . . .	137
Commentaires . . . . .	138
Structures de Hodge de poids 1 . . . . .	139
Structures de Hodge de poids 1 et tores complexes . . . . .	139
Polarisations . . . . .	140
Le diviseur $\Theta$ . . . . .	141
L'espace de modules . . . . .	142
Cas des courbes . . . . .	142
Le problème de Schottky . . . . .	144
Sur les démonstrations du théorème de Torelli . . . . .	144
Structures de Hodge du type courbes . . . . .	145
Digression : le problème de Lüroth . . . . .	145
Structures de Hodge de poids supérieur ou égal à 2 . . . . .	147
Structures de Hodge de poids 2 . . . . .	147
Une structure de Hodge de type K3 . . . . .	148
En général . . . . .	149
Conclusion . . . . .	149
Questions . . . . .	150
Bibliographie . . . . .	150

## **Leçon 7. Gilles Dowek. Algorithmes et modèles : l'histoire d'une convergence**

	<b>153</b>
Les buts de la théorie de la démonstration . . . . .	154
Deux outils . . . . .	155
Les modèles . . . . .	156
Les algorithmes . . . . .	165
L'élimination des coupures . . . . .	171
Le problème des axiomes . . . . .	174
La propriété de la disjonction . . . . .	174
La Dédution modulo . . . . .	178
L'élimination des coupures en utilisant des modèles . . . . .	182
La correction et la complétude . . . . .	183
L'élimination des coupures . . . . .	185
L'élimination des coupures en utilisant des algorithmes . . . . .	186
La démonstration de TAIT . . . . .	187
La réductibilité . . . . .	187
Les cinq étapes de la convergence . . . . .	189
Les cinq étapes . . . . .	189
Le théorème et ses prolongements . . . . .	197

Questions . . . . .	199
Bibliographie . . . . .	201
<b>Leçon 8. J.-M. Bismut. Laplacien hypoelliptique et théorème de l'indice</b>	<b>203</b>
Introduction . . . . .	203
Philosophie générale . . . . .	204
La déformation hypoelliptique du complexe de de Rham-Hodge . . . . .	205
Considérations dynamiques . . . . .	210
Le laplacien hypoelliptique sur le cercle . . . . .	211
Opérateur de Dirac et théorème de l'indice d'Atiyah-Singer . . . . .	215
Construction de l'opérateur de Dirac hypoelliptique . . . . .	221
Laplacien hypoelliptique et formule des traces . . . . .	222
Une promenade à New York . . . . .	223
Laplacien hypoelliptique et physique . . . . .	224
Questions . . . . .	225
Bibliographie . . . . .	226
<b>Leçon 9. Christophe Soulé. Théorie d'Arakelov</b>	<b>227</b>
Introduction . . . . .	227
Intersection arithmétique . . . . .	228
– Surface arithmétique . . . . .	228
– Fibré hermitien inversible sur X . . . . .	230
Le fibré dualisant relatif . . . . .	231
Définition de l'intersection arithmétique . . . . .	233
Le déterminant du laplacien . . . . .	234
Le théorème de Riemann-Roch arithmétique . . . . .	235
Applications de la théorie d'Arakelov . . . . .	237
Questions . . . . .	238
Bibliographie . . . . .	238
<b>Leçon 10. Laure Saint-Raymond. L'équation de Boltzmann. État de l'art et perspectives</b>	<b>241</b>
L'idée révolutionnaire de Boltzmann . . . . .	241
L'inconnue . . . . .	242
Le transport . . . . .	242
Les collisions, l'équation de Boltzmann . . . . .	243
Le théorème H . . . . .	246

Quelques propriétés du transport libre . . . . .	248
La méthode des caractéristiques . . . . .	249
Estimations <i>a priori</i> . . . . .	250
Propagation des singularités . . . . .	250
Régularité en moyenne . . . . .	251
Propriété de mélange . . . . .	254
Collisions et relaxation . . . . .	255
L'opérateur de collisions linéarisé . . . . .	256
Cas non linéaire, sans transport . . . . .	258
Cas non homogène en espace . . . . .	259
L'irréversibilité, une histoire de probabilités . . . . .	261
La hiérarchie BBGKY . . . . .	263
Limite thermodynamique et <i>scaling</i> de Boltzmann-Grad . . . . .	265
Propagation du chaos . . . . .	266
La source de l'irréversibilité . . . . .	266
La preuve de Lanford . . . . .	267
Limites hydrodynamiques . . . . .	269
Limite de relaxation rapide . . . . .	270
Limite vers Euler compressible . . . . .	271
Limites incompressibles . . . . .	273
État des lieux . . . . .	274
Questions . . . . .	275
Bibliographie . . . . .	276

## **Leçon 11. Sergiu Klainerman. Les défis mathématiques de la relativité générale**

	<b>279</b>
Le problème d'évolution en relativité générale . . . . .	280
Espace-temps . . . . .	280
Les équations d'Einstein . . . . .	281
Solutions particulières . . . . .	282
Le problème de Cauchy . . . . .	287
Conjectures principales . . . . .	291
Espaces avec symétries . . . . .	296
Conjecture de la courbure bornée $L^2$ . . . . .	298
Stratégie pour BCC . . . . .	300
Un critère d'explosion . . . . .	302
Présentation du résultat . . . . .	302
Idées de la preuve . . . . .	305
Unicité de la métrique de Kerr et problèmes mal posés liés . . . . .	309

Problèmes caractéristiques mal posés. . . . .	311
L'équation d'onde dans $\mathbb{R}^{3+1}$ . . . . .	312
Estimations de Carleman . . . . .	312
Bibliographie . . . . .	313
<b>Leçon 12. Pierre Pansu. Difficulté d'approximation : de l'analyse</b>	
<b>  à l'informatique théorique</b>	<b>317</b>
Un théorème de la théorie du choix social . . . . .	317
Influences . . . . .	319
Sensibilité au bruit . . . . .	319
Le théorème <i>Majority is stablest</i> . . . . .	320
MAX CUT . . . . .	323
Inimitiés . . . . .	323
Le problème MAX CUT . . . . .	324
Le problème MAX CUT approché . . . . .	326
L'algorithme de Goemans et Williamson . . . . .	327
Le nombre 0.878... est-il le seuil optimal d'approximabilité? . . . . .	331
Jeux uniques . . . . .	332
Jeux coopératifs . . . . .	332
Réduction des jeux uniques à MAX CUT . . . . .	336
Conclusion . . . . .	341
Questions . . . . .	342
Bibliographie . . . . .	343
<b>Table des matières du volume 1</b>	<b>345</b>
<b>Table des matières du volume 2</b>	<b>349</b>
<b>Table des matières du volume 3</b>	<b>353</b>
<b>Table des matières du volume 4</b>	<b>360</b>