

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>I</b>
<b>Chapitre 8. Loix et moments de variables aléatoires</b>	<b>3</b>
8.1. Compléments de théorie de la mesure . . . . .	3
8.2. Loi d'une variable aléatoire . . . . .	9
8.3. Moments de variables aléatoires . . . . .	15
Exercices . . . . .	29
<b>Chapitre 9. Indépendance de tribus, de variables aléatoires</b>	<b>39</b>
9.1. Indépendance de familles d'événements et de variables aléatoires	39
9.2. Indépendance et événements asymptotiques . . . . .	47
9.3. Quelques résultats liés à l'indépendance et au modèle de pile ou face . . . . .	52
9.4. Convolution et loi de la somme de variables aléatoires indépen- dantes . . . . .	61
Exercices . . . . .	63
<b>Chapitre 10. Convergences et lois des grands nombres</b>	<b>87</b>
10.1. Convergence en probabilité et presque sûre . . . . .	87
10.2. Convergence $L^p$ et équi-intégrabilité . . . . .	93
10.3. Séries de variables aléatoires indépendantes . . . . .	98
10.4. Lois des grands nombres . . . . .	101
Exercices . . . . .	116
<b>Chapitre 11. Probabilités et espérances conditionnelles</b>	<b>135</b>
11.1. Noyaux et lois conditionnelles . . . . .	135
11.2. Moments conditionnels . . . . .	147
11.3. Espérance conditionnelle . . . . .	150
11.3.1. L'espérance conditionnelle comme projecteur orthogo- nal dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . . . . .	151
11.3.2. Extension de la définition de l'espérance conditionnelle à $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . . . . .	154
11.3.3. Extension de la définition de l'espérance conditionnelle à $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ . . . . .	157

11.3.4. Théorèmes de convergence . . . . .	159
11.3.5. Inégalité de Jensen . . . . .	162
11.3.6. Calcul d'espérance conditionnelle . . . . .	163
Exercices . . . . .	164
<b>Chapitre 12. Transformées de Fourier et fonctions caractéristiques</b>	<b>191</b>
12.1. Définition et propriétés immédiates . . . . .	191
12.2. Le théorème d'injectivité . . . . .	193
12.3. Propriétés relatives à l'indépendance . . . . .	200
12.4. Fonction caractéristique et moments . . . . .	203
Exercices . . . . .	212
<b>Chapitre 13. Variables aléatoires gaussiennes</b>	<b>235</b>
13.1. Définition et propriétés . . . . .	236
13.2. Existence des mesures gaussiennes. Condition d'absolue conti- nuité . . . . .	238
13.3. Marginales . . . . .	244
13.4. Régression ; le modèle linéaire . . . . .	250
13.4.1. Estimation des paramètres de régression . . . . .	252
13.4.2. Le modèle linéaire gaussien . . . . .	259
Exercices . . . . .	267
<b>Chapitre 14. Convergence de mesures et convergence en loi</b>	<b>289</b>
14.1. Convergence de mesures bornées sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	289
14.2. Convergence en loi . . . . .	303
14.3. Théorème limite central . . . . .	313
14.4. Estimation . . . . .	320
Exercices . . . . .	327
<b>Chapitre 15. Processus et martingales discrets</b>	<b>349</b>
15.1. Quelques exemples de processus . . . . .	349
15.2. Processus et martingales : définitions . . . . .	351
15.3. Temps d'arrêt . . . . .	354
15.4. Premier théorème d'arrêt . . . . .	358
15.5. Lemme maximal et martingales dans $L^2$ . . . . .	360
15.6. Décomposition de Doob . . . . .	365
15.7. Convergence de martingales intégrables . . . . .	369
15.8. Deuxième théorème d'arrêt . . . . .	376
15.9. Convergence de sous- et surmartingales . . . . .	378
Exercices . . . . .	379

<b>Chapitre 16. Chaînes de Markov</b>	<b>397</b>
16.1. Introduction . . . . .	397
16.2. Indépendance conditionnelle . . . . .	401
16.3. Chaînes de Markov : propriétés générales . . . . .	405
16.3.1. Propriété de Markov ; matrices de transition . . . . .	405
16.3.2. Propriété de Markov simple ; lois fini-dimensionnelles . . . . .	417
16.3.3. Loi initiale ; propriété de Markov forte . . . . .	422
16.4. Visites à un état fixe . . . . .	426
16.4.1. Étude de la suite des temps de passage en un point . . . . .	428
16.4.2. Lois du nombre de visites d'un point et du premier temps de passage en ce point . . . . .	430
16.5. Classification des états . . . . .	435
16.5.1. Communication ; périodicité . . . . .	435
16.5.2. Récurrence . . . . .	440
16.5.3. Comportement asymptotique et classification . . . . .	442
16.5.4. Critère analytique de récurrence . . . . .	450
16.6. Calcul de la matrice potentiel et de $P_x(T_y^1 < +\infty)$ . . . . .	453
16.6.1. Calcul de la matrice potentiel . . . . .	453
16.6.2. Calcul de $F(x, y) \equiv P_x(T_y^1 < +\infty)$ . . . . .	454
16.7. Mesures invariantes . . . . .	457
16.8. Loi forte des grands nombres . . . . .	470
16.8.1. Théorème de loi forte . . . . .	470
16.8.2. Estimation de la matrice de transition . . . . .	475
Exercices . . . . .	477
<b>Chapitre A. Résumé de théorie de la mesure</b>	<b>517</b>
A.1. Mesure et probabilité . . . . .	517
A.2. Intégrale . . . . .	521
A.3. Trois théorèmes de convergence . . . . .	523
A.4. Mesure produit et théorème de Fubini . . . . .	526
<b>Index</b>	<b>531</b>

### Liste des chapitres du premier tome

1. Phénomènes aléatoires et modèles probabilistes
2. Familles sommables de nombres réels
3. Indépendance
4. Probabilités et lois conditionnelles
5. Moments d'une variable aléatoire discrète
6. Variables aléatoires à densité
7. Approximation de lois. Loi faible des grands nombres