

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>xi</b>
<b>Notations usuelles</b>	<b>1</b>
<b>Logique, ensembles, applications (bref mémento)</b>	<b>3</b>
<b>Chapitre 1. Normes</b>	<b>7</b>
1. Objectifs . . . . .	7
2. Panorama du cours . . . . .	7
3. Exercices . . . . .	12
Exercice 1. Une boule pas ronde . . . . .	12
Exercice 2. Les boules sont homéomorphes . . . . .	12
Exercice 3. Norme et convexité . . . . .	14
Exercice 4. Les normes $\ \cdot\ _p$ . . . . .	15
Exercice 5. Équivalence des normes $\ \cdot\ _p$ . . . . .	17
Exercice 6. Jauge . . . . .	20
Exercice 7. Équivalence des normes : une réciproque . . . . .	22
Exercice 8. Norme d'une forme linéaire et distance au noyau . . . . .	23
Exercice 9. Théorème de Hahn-Banach en dimension finie . . . . .	26
Exercice 10. Normes classiques de matrices . . . . .	29
Exercice 11. Être ou ne pas être contractante . . . . .	34
Exercice 12. *Rayon spectral . . . . .	36
Exercice 13. Inégalité de Hardy . . . . .	40
<b>Chapitre 2. Différentielles</b>	<b>45</b>
1. Objectifs . . . . .	45
2. Panorama du cours . . . . .	45
3. Exercices . . . . .	55
Exercice 14. Pont aux ânes . . . . .	55
Exercice 15. Premiers exemples de différentielles . . . . .	56
Exercice 16. Différentielle de l'inverse, et de l'exponentielle (version douce) . . . . .	57
Exercice 17. Tangente à une courbe . . . . .	61
Exercice 18. Holomorphe, différentiable, conforme . . . . .	66

Exercice 19. Différentielle de l'inversion . . . . .	69
Exercice 20. Coordonnées polaires . . . . .	71
Exercice 21. Identité d'Euler des fonctions homogènes . .	74
Exercice 22. La boule aussi grosse que l'espace? . . . . .	74
Exercice 23. Intégrales premières . . . . .	76
Exercice 24. *Lois de groupe sur $\mathbb{R}$ . . . . .	78
Exercice 25. Mouvements tangents, rotation instantanée .	80
Exercice 26. Différentielle du déterminant . . . . .	83
Exercice 27. Une excursion en dimension infinie . . . . .	86
Exercice 28. Interprétation du gradient . . . . .	87
Exercice 29. *Interprétation du déterminant jacobien . . .	89
Exercice 30. *Interprétation de la divergence . . . . .	91
Exercice 31. Interprétation du rotationnel . . . . .	95
Exercice 32. Intégrales de surface . . . . .	96
<b>Chapitre 3. Inégalité de la moyenne</b>	<b>103</b>
1. Objectifs . . . . .	103
2. Panorama du cours . . . . .	104
3. Exercices . . . . .	107
Exercice 33. Au plus une . . . . .	107
Exercice 34. Nombres algébriques, nombres transcendants	108
Exercice 35. Une suite dense sur le cercle . . . . .	109
Exercice 36. Comparer une série à une intégrale . . . . .	110
Exercice 37. Nostalgie du point $c$ . . . . .	113
Exercice 38. Caractérisation des applications $C^1$ . . . . .	115
Exercice 39. Différentielle d'une limite ; application exponen-	
tielle . . . . .	117
Exercice 40. Dérivation sous une intégrale ; fonction gamma	120
Exercice 41. Longueur d'un arc . . . . .	124
Exercice 42. Fonctions convexes . . . . .	127
Exercice 43. Théorème de Sard en dimension un . . . . .	130
Exercice 44. Inéquations différentielles ; application aux équations	
différentielles . . . . .	132
Exercice 45. Petits mouvements du pendule . . . . .	135
Exercice 46. *Fonction de Liapounov et stabilité . . . . .	138
Exercice 47. *Un pas vers le calcul des variations . . . . .	143
<b>Chapitre 4. Point fixe</b>	<b>147</b>
1. Objectifs . . . . .	147
2. Panorama du cours . . . . .	147
3. Exercices . . . . .	149

Exercice 48. Attraction, répulsion, superattraction . . . . .	149
Exercice 49. Newton et la superattraction . . . . .	152
Exercice 50. Moyenne arithmético-géométrique . . . . .	156
Exercice 51. L'idée fixe du Savant Cosinus . . . . .	160
Exercice 52. Itération du sinus . . . . .	162
Exercice 53. Apparition de Cantor . . . . .	165
Exercice 54. Inverser sans inverser . . . . .	166
Exercice 55. Le point fixe, et un peu mieux . . . . .	169
Exercice 56. Variations sur point fixe et compacité . . . . .	171
Exercice 57. Variation du point fixe . . . . .	173
Exercice 58. *Point fixe et fonctions holomorphes . . . . .	174
Exercice 59. *Théorème du point fixe de Brouwer . . . . .	175
Exercice 60. Point fixe et équations différentielles : un théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	179
Exercice 61. Point fixe et équations intégrales . . . . .	183
<b>Chapitre 5. Fonctions inverses, implicites, et sous-variétés</b>	<b>187</b>
1. Objectifs . . . . .	187
2. Fonctions inverses (panorama) . . . . .	188
3. Fonctions implicites (panorama) . . . . .	192
4. Sous-variétés (panorama) . . . . .	196
5. Exercices sur les fonctions inverses . . . . .	202
Exercice 62. Un exemple simple . . . . .	202
Exercice 63. Deux contre-exemples . . . . .	204
Exercice 64. Une équation aux dérivées partielles . . . . .	206
Exercice 65. Logarithme d'une matrice . . . . .	208
Exercice 66. Réduction des formes quadratiques, version diffé- rentiable . . . . .	209
Exercice 67. Deux équations, deux inconnues . . . . .	211
Exercice 68. Changement de variables dans une intégrale double . . . . .	214
Exercice 69. Redressement d'un champ de vecteurs . . . . .	217
Exercice 70. Inversion globale . . . . .	221
Exercice 71. *Point fixe et inversion locale . . . . .	222
Exercice 72. Submersion ; fonctions indépendantes . . . . .	226
Exercice 73. Immersion . . . . .	230
Exercice 74. *Théorème du rang constant . . . . .	231
Exercice 75. *Inversion d'une fonction holomorphe . . . . .	234
6. Exercices sur les fonctions implicites . . . . .	237
Exercice 76. Folium de Descartes . . . . .	237
Exercice 77. Résolution approchée d'une équation . . . . .	240

Exercice 78. L'équation du troisième degré . . . . .	242
Exercice 79. Asymptotique d'une équation du troisième degré	245
Exercice 80. Dérivées partielles et thermodynamique . . . . .	248
Exercice 81. Variation du point fixe (bis) . . . . .	250
Exercice 82. Deux équations, deux inconnues (bis) . . . . .	253
Exercice 83. Fonctions implicites, approche élémentaire . . . . .	254
Exercice 84. Fonctions implicites et Cauchy-Lipschitz . . . . .	256
Exercice 85. Équation de Burgers . . . . .	257
Exercice 86. *Point fixe et fonctions implicites . . . . .	259
Exercice 87. *Développements de l'anomalie excentrique . . . . .	263
7. Exercices sur les sous-variétés . . . . .	269
Exercice 88. Contre-exemples pas lisses . . . . .	269
Exercice 89. Rencontre d'un cylindre et d'une sphère . . . . .	273
Exercice 90. Surfaces de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	275
Exercice 91. Courbes de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	278
Exercice 92. Tangente à l'ellipse . . . . .	280
Exercice 93. Contour apparent d'un ellipsoïde . . . . .	283
Exercice 94. Groupes de matrices . . . . .	284
Exercice 95. *Matrices de rang donné . . . . .	286
Exercice 96. *Équation iconale . . . . .	287
<b>Chapitre 6. Différentielles secondes</b>	<b>293</b>
1. Objectifs . . . . .	293
2. Panorama du cours . . . . .	293
3. Exercices . . . . .	299
Exercice 97. Pont aux ânes . . . . .	299
Exercice 98. Isométries . . . . .	300
Exercice 99. Matrice jacobienne, symétrie et antisymétrie	303
Exercice 100. Relèvement ; mesure d'un angle . . . . .	305
Exercice 101. *Différentielle de l'exponentielle (version dure)	306
Exercice 102. *Applications de jacobien donné . . . . .	309
Exercice 103. *Équation de Monge-Ampère . . . . .	312
Exercice 104. Étude affine locale d'une courbe plane . . . . .	315
Exercice 105. Étude métrique locale d'une courbe plane . . . . .	317
Exercice 106. Un lemme de division . . . . .	323
Exercice 107. Laplacien et moyennes . . . . .	324
Exercice 108. Fonctions convexes (bis) . . . . .	329
Exercice 109. Lemme de Morse à deux variables . . . . .	330
Exercice 110. *Éclatement d'un point double . . . . .	335
Exercice 111. Étude affine locale d'une surface . . . . .	341
Exercice 112. Étude métrique locale d'une surface . . . . .	343

Exercice 113. Méthode de Laplace . . . . .	349
Exercice 114. Lemme de Morse à $n$ variables . . . . .	354
Exercice 115. Théorème de Whitney . . . . .	355
Exercice 116. *Théorème de Borel et applications . . . . .	359
Exercice 117. *Groupe local . . . . .	362
<b>Chapitre 7. Problèmes d'extremum</b>	<b>369</b>
1. Objectifs . . . . .	369
2. Panorama du cours . . . . .	370
3. Finale : courbes de niveau . . . . .	375
4. Exercices . . . . .	379
Exercice 118. Premiers exemples d'extremum . . . . .	379
Exercice 119. Fonctions convexes et extremums . . . . .	381
Exercice 120. Fonctions holomorphes et extremums . . . . .	382
Exercice 121. Moindres carrés . . . . .	384
Exercice 122. Point de Fermat . . . . .	386
Exercice 123. Perturbation d'un extremum . . . . .	391
Exercice 124. Principe du maximum . . . . .	392
Exercice 125. Minimum et stabilité . . . . .	395
Exercice 126. Distance d'un point à une surface . . . . .	400
Exercice 127. Géométrie de la méthode du col . . . . .	403
Exercice 128. Mise en boîte à peu de frais . . . . .	406
Exercice 129. Directions principales d'une quadrique . . . . .	408
Exercice 130. Inégalité de Hadamard . . . . .	409
Exercice 131. Entropie maximum . . . . .	411
Exercice 132. Une partie de billard . . . . .	413
Exercice 133. *Un peu de calcul des variations . . . . .	415
<b>Bibliographie</b>	<b>419</b>
<b>Index</b>	<b>423</b>