

Table des matières

Avant-propos	xi
Notations usuelles	1
Logique, ensembles, applications (bref memento)	3
Chapitre 1. Normes	7
1. Objectifs	7
2. Panorama du cours	7
3. Exercices	12
Exercice 1. Une boule pas ronde	12
Exercice 2. Les boules sont homéomorphes	12
Exercice 3. Norme et convexité	14
Exercice 4. Les normes $\ \cdot\ _p$	15
Exercice 5. Équivalence des normes $\ \cdot\ _p$	17
Exercice 6. Jauge	20
Exercice 7. Équivalence des normes : une réciproque	22
Exercice 8. Norme d'une forme linéaire et distance au noyau	23
Exercice 9. Théorème de Hahn-Banach en dimension finie	26
Exercice 10. Normes classiques de matrices	29
Exercice 11. Être ou ne pas être contractante	34
Exercice 12. *Rayon spectral	36
Exercice 13. Inégalité de Hardy	40
Chapitre 2. Différentielles	45
1. Objectifs	45
2. Panorama du cours	45
3. Exercices	55
Exercice 14. Pont aux ânes	55
Exercice 15. Premiers exemples de différentielles	56
Exercice 16. Différentielle de l'inverse, et de l'exponentielle (version douce)	57
Exercice 17. Tangente à une courbe	61
Exercice 18. Holomorphe, différentiable, conforme	66

Exercice 19. Différentielle de l'inversion	69
Exercice 20. Coordonnées polaires	71
Exercice 21. Identité d'Euler des fonctions homogènes . .	74
Exercice 22. La boule aussi grosse que l'espace?	74
Exercice 23. Intégrales premières	76
Exercice 24. *Lois de groupe sur \mathbb{R}	78
Exercice 25. Mouvements tangents, rotation instantanée .	80
Exercice 26. Différentielle du déterminant	83
Exercice 27. Une excursion en dimension infinie	86
Exercice 28. Interprétation du gradient	87
Exercice 29. *Interprétation du déterminant jacobien . . .	89
Exercice 30. *Interprétation de la divergence	91
Exercice 31. Interprétation du rotationnel	95
Exercice 32. Intégrales de surface	96

Chapitre 3. Inégalité de la moyenne 103

1. Objectifs	103
2. Panorama du cours	104
3. Exercices	107
Exercice 33. Au plus une	107
Exercice 34. Nombres algébriques, nombres transcendants	108
Exercice 35. Une suite dense sur le cercle	109
Exercice 36. Comparer une série à une intégrale	110
Exercice 37. Nostalgie du point c	113
Exercice 38. Caractérisation des applications C^1	115
Exercice 39. Différentielle d'une limite ; application exponen-	
tielle	117
Exercice 40. Dérivation sous une intégrale ; fonction gamma	120
Exercice 41. Longueur d'un arc	124
Exercice 42. Fonctions convexes	127
Exercice 43. Théorème de Sard en dimension un	130
Exercice 44. Inéquations différentielles ; application aux équations	
différentielles	132
Exercice 45. Petits mouvements du pendule	135
Exercice 46. *Fonction de Liapounov et stabilité	138
Exercice 47. *Un pas vers le calcul des variations	143

Chapitre 4. Point fixe 147

1. Objectifs	147
2. Panorama du cours	147
3. Exercices	149

Exercice 48. Attraction, répulsion, superattraction	149
Exercice 49. Newton et la superattraction	152
Exercice 50. Moyenne arithmético-géométrique	156
Exercice 51. L'idée fixe du Savant Cosinus	160
Exercice 52. Itération du sinus	162
Exercice 53. Apparition de Cantor	165
Exercice 54. Inverser sans inverser	166
Exercice 55. Le point fixe, et un peu mieux	169
Exercice 56. Variations sur point fixe et compacité	171
Exercice 57. Variation du point fixe	173
Exercice 58. *Point fixe et fonctions holomorphes	174
Exercice 59. *Théorème du point fixe de Brouwer	175
Exercice 60. Point fixe et équations différentielles : un théorème de Cauchy-Lipschitz	179
Exercice 61. Point fixe et équations intégrales	183
Chapitre 5. Fonctions inverses, implicites, et sous-variétés	187
1. Objectifs	187
2. Fonctions inverses (panorama)	188
3. Fonctions implicites (panorama)	192
4. Sous-variétés (panorama)	196
5. Exercices sur les fonctions inverses	202
Exercice 62. Un exemple simple	202
Exercice 63. Deux contre-exemples	204
Exercice 64. Une équation aux dérivées partielles	206
Exercice 65. Logarithme d'une matrice	208
Exercice 66. Réduction des formes quadratiques, version diffé- rentiable	209
Exercice 67. Deux équations, deux inconnues	211
Exercice 68. Changement de variables dans une intégrale double	214
Exercice 69. Redressement d'un champ de vecteurs	217
Exercice 70. Inversion globale	221
Exercice 71. *Point fixe et inversion locale	222
Exercice 72. Submersion ; fonctions indépendantes	226
Exercice 73. Immersion	230
Exercice 74. *Théorème du rang constant	231
Exercice 75. *Inversion d'une fonction holomorphe	234
6. Exercices sur les fonctions implicites	237
Exercice 76. Folium de Descartes	237
Exercice 77. Résolution approchée d'une équation	240

Exercice 78. L'équation du troisième degré	242
Exercice 79. Asymptotique d'une équation du troisième degré	245
Exercice 80. Dérivées partielles et thermodynamique . . .	248
Exercice 81. Variation du point fixe (bis)	250
Exercice 82. Deux équations, deux inconnues (bis)	253
Exercice 83. Fonctions implicites, approche élémentaire . .	254
Exercice 84. Fonctions implicites et Cauchy-Lipschitz . . .	256
Exercice 85. Équation de Burgers	257
Exercice 86. *Point fixe et fonctions implicites	259
Exercice 87. *Développements de l'anomalie excentrique .	263
7. Exercices sur les sous-variétés	269
Exercice 88. Contre-exemples pas lisses	269
Exercice 89. Rencontre d'un cylindre et d'une sphère . . .	273
Exercice 90. Surfaces de \mathbb{R}^3	275
Exercice 91. Courbes de \mathbb{R}^3	278
Exercice 92. Tangente à l'ellipse	280
Exercice 93. Contour apparent d'un ellipsoïde	283
Exercice 94. Groupes de matrices	284
Exercice 95. *Matrices de rang donné	286
Exercice 96. *Équation iconale	287
Chapitre 6. Différentielles secondes	293
1. Objectifs	293
2. Panorama du cours	293
3. Exercices	299
Exercice 97. Pont aux ânes	299
Exercice 98. Isométries	300
Exercice 99. Matrice jacobienne, symétrie et antisymétrie	303
Exercice 100. Relèvement ; mesure d'un angle	305
Exercice 101. *Différentielle de l'exponentielle (version dure)	306
Exercice 102. *Applications de jacobien donné	309
Exercice 103. *Équation de Monge-Ampère	312
Exercice 104. Étude affine locale d'une courbe plane . . .	315
Exercice 105. Étude métrique locale d'une courbe plane .	317
Exercice 106. Un lemme de division	323
Exercice 107. Laplacien et moyennes	324
Exercice 108. Fonctions convexes (bis)	329
Exercice 109. Lemme de Morse à deux variables	330
Exercice 110. *Éclatement d'un point double	335
Exercice 111. Étude affine locale d'une surface	341
Exercice 112. Étude métrique locale d'une surface	343

Exercice 113. Méthode de Laplace	349
Exercice 114. Lemme de Morse à n variables	354
Exercice 115. Théorème de Whitney	355
Exercice 116. *Théorème de Borel et applications	359
Exercice 117. *Groupe local	362
Chapitre 7. Problèmes d'extremum	369
1. Objectifs	369
2. Panorama du cours	370
3. Finale : courbes de niveau	375
4. Exercices	379
Exercice 118. Premiers exemples d'extremum	379
Exercice 119. Fonctions convexes et extremums	381
Exercice 120. Fonctions holomorphes et extremums	382
Exercice 121. Moindres carrés	384
Exercice 122. Point de Fermat	386
Exercice 123. Perturbation d'un extremum	391
Exercice 124. Principe du maximum	392
Exercice 125. Minimum et stabilité	395
Exercice 126. Distance d'un point à une surface	400
Exercice 127. Géométrie de la méthode du col	403
Exercice 128. Mise en boîte à peu de frais	406
Exercice 129. Directions principales d'une quadrique	408
Exercice 130. Inégalité de Hadamard	409
Exercice 131. Entropie maximum	411
Exercice 132. Une partie de billard	413
Exercice 133. *Un peu de calcul des variations	415
Bibliographie	419
Index	423