

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 11 |
| Chapitre 1. Corps | 15 |
| 1. Extensions de corps | 17 |
| 1.1. Nombres algébriques – Nombres transcendants | 18 |
| 1.2. Extensions algébriques | 21 |
| 1.3. Extensions transcendentes | 23 |
| 1.4. Corps de rupture | 23 |
| 2. Utilisation de l’algèbre linéaire | 25 |
| 2.1. Degré d’une extension | 25 |
| 2.2. Constructions à la règle et au compas | 28 |
| 2.3. Corps de décomposition – Extensions normales – Extensions séparables | 34 |
| 3. Utilisation de la théorie des groupes | 41 |
| 3.1. Automorphismes de corps – Groupe de Galois | 41 |
| 3.2. Résolution par radicaux | 48 |
| Le cas du degré 3 | 48 |
| Le cas du degré 4 | 51 |
| Le cas des degrés ≥ 5 | 55 |
| 4. Clôture algébrique de \mathbb{Q} | 56 |
| Complément du chapitre 1 | 59 |
| Correspondance de Galois | 59 |
| Exercices du chapitre 1 | 71 |
| Solutions des tests du chapitre 1 | 73 |
| Solutions des exercices du chapitre 1 | 75 |
| Chapitre 2. Corps finis | 79 |
| 1. Clôture algébrique de \mathbb{F}_p | 79 |
| 2. Existence et unicité du corps à p^n éléments | 80 |
| 2.1. Unicité à isomorphisme près du corps à p^n éléments | 81 |
| 2.2. Existence du corps à p^n éléments | 81 |
| 2.3. Groupe multiplicatif du corps à p^n éléments | 82 |
| 3. Sous-corps de \mathbb{F}_{p^n} | 83 |
| 3.1. Sous-corps et extensions | 83 |
| 3.2. Automorphismes des corps finis | 84 |
| 3.3. Nouvelle construction de la clôture algébrique de \mathbb{F}_p | 85 |
| 4. Polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_p[X]$ | 85 |
| 4.1. Existence d’un polynôme irréductible de degré n dans $\mathbb{F}_p[X]$ | 85 |
| 4.2. Corps finis <i>via</i> la caractéristique nulle | 87 |
| 4.3. Dénombrement des polynômes irréductibles | 87 |
| 4.4. Exemples de corps finis | 88 |

| | |
|--|------------|
| 5. Polygones réguliers constructibles à la règle et au compas | 90 |
| 6. Théorème de Wedderburn | 95 |
| Compléments du chapitre 2 | 99 |
| 1. Modèles dénombrables du plan euclidien | 99 |
| 1.1. $K = \mathbb{Q}$ | 99 |
| 1.2. $K = \mathbb{Q}^{qc}$ | 100 |
| 1.3. $K = \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$ | 101 |
| 2. Quaternions | 102 |
| 2.1. Construction des quaternions | 102 |
| 2.2. Paramétrage de $SO_2(\mathbb{R})$ et $SO_4(\mathbb{R})$ via les quaternions | 105 |
| Exercices du chapitre 2 | 109 |
| Solutions des tests du chapitre 2 | 113 |
| Solutions des exercices du chapitre 2 | 115 |
| | |
| Chapitre 3. Ensembles | 121 |
| 1. Rappels et quelques compléments | 121 |
| 1.1. Parties | 121 |
| 1.2. Relations binaires | 122 |
| 1.3. Applications | 123 |
| 1.4. Familles et produits | 124 |
| 1.5. Peut-on tout faire avec des ensembles ? | 124 |
| 2. Ensembles ordonnés | 125 |
| 2.1. Relations d'ordre | 125 |
| 2.2. Ordre produit, ordre lexicographique | 126 |
| 2.3. Bornes et éléments extrémaux | 128 |
| 2.4. Segments initiaux | 129 |
| 2.5. Homomorphismes d'ensembles ordonnés | 130 |
| 2.6. Bons ordres | 131 |
| 2.7. Récurrence transfinie | 133 |
| 2.8. Définition d'une fonction par récurrence transfinie | 133 |
| Exercices du chapitre 3 | 135 |
| Solutions des tests du chapitre 3 | 137 |
| Solutions des exercices du chapitre 3 | 139 |
| | |
| Chapitre 4. Théorie axiomatique des ensembles. Cardinaux | 143 |
| 1. Théorie axiomatique des ensembles | 143 |
| 1.1. Les axiomes (presque) simples | 143 |
| 1.2. Les axiomes techniques | 144 |
| 1.3. Conséquences | 145 |
| 1.4. Entiers naturels | 146 |
| 1.5. Classes ou ensembles | 147 |
| 1.6. Les axiomes facultatifs | 148 |
| 1.7. Énoncés équivalents à l'axiome du choix | 149 |
| 1.8. Des controverses aux mathématiques constructives | 151 |
| Deux millénaires de paradoxes et de controverses | 151 |

| | |
|---|------------|
| Brouwer et l'intuitionnisme | 152 |
| Mathématiques classiques et mathématiques constructives | 153 |
| L'attitude des mathématiciens | 155 |
| 2. Cardinaux | 156 |
| 2.1. Théorème de comparabilité | 156 |
| 2.2. Équipotence | 158 |
| 2.3. Ensembles dénombrables | 160 |
| 2.4. Ensembles non dénombrables | 163 |
| 2.5. Arithmétique cardinale | 164 |
| Complément du chapitre 4 | 167 |
| Les ordinaux | 167 |
| 1. Relations d'ordre strict | 167 |
| 2. Ensembles transitifs | 168 |
| 3. Ordinaux | 168 |
| 4. Définition d'une fonction par récurrence transfinie sur la classe des ordinaux | 172 |
| 5. Quelques ordinaux dénombrables | 172 |
| 6. Lemme de Zorn | 175 |
| 7. Cardinaux et ordinaux | 176 |
| 8. L'invention des ordinaux | 177 |
| Exercices du chapitre 4 | 179 |
| Solutions des tests du chapitre 4 | 181 |
| Solutions des exercices du chapitre 4 | 183 |
| Bibliographie | 187 |
| Index des notations | 189 |
| Index | 191 |