

Table des matières

Introduction	11
Chapitre 1. Corps	15
1. Extensions de corps	17
1.1. Nombres algébriques – Nombres transcendants	18
1.2. Extensions algébriques	21
1.3. Extensions transcendentes	23
1.4. Corps de rupture	23
2. Utilisation de l’algèbre linéaire	25
2.1. Degré d’une extension	25
2.2. Constructions à la règle et au compas	28
2.3. Corps de décomposition – Extensions normales – Extensions séparables	34
3. Utilisation de la théorie des groupes	41
3.1. Automorphismes de corps – Groupe de Galois	41
3.2. Résolution par radicaux	48
Le cas du degré 3	48
Le cas du degré 4	51
Le cas des degrés ≥ 5	55
4. Clôture algébrique de \mathbb{Q}	56
Complément du chapitre 1	59
Correspondance de Galois	59
Exercices du chapitre 1	71
Solutions des tests du chapitre 1	73
Solutions des exercices du chapitre 1	75
Chapitre 2. Corps finis	79
1. Clôture algébrique de \mathbb{F}_p	79
2. Existence et unicité du corps à p^n éléments	80
2.1. Unicité à isomorphisme près du corps à p^n éléments	81
2.2. Existence du corps à p^n éléments	81
2.3. Groupe multiplicatif du corps à p^n éléments	82
3. Sous-corps de \mathbb{F}_{p^n}	83
3.1. Sous-corps et extensions	83
3.2. Automorphismes des corps finis	84
3.3. Nouvelle construction de la clôture algébrique de \mathbb{F}_p	85
4. Polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_p[X]$	85
4.1. Existence d’un polynôme irréductible de degré n dans $\mathbb{F}_p[X]$	85
4.2. Corps finis <i>via</i> la caractéristique nulle	87
4.3. Dénombrement des polynômes irréductibles	87
4.4. Exemples de corps finis	88

5. Polygones réguliers constructibles à la règle et au compas	90
6. Théorème de Wedderburn	95
Compléments du chapitre 2	99
1. Modèles dénombrables du plan euclidien	99
1.1. $K = \mathbb{Q}$	99
1.2. $K = \mathbb{Q}^{qc}$	100
1.3. $K = \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$	101
2. Quaternions	102
2.1. Construction des quaternions	102
2.2. Paramétrage de $SO_2(\mathbb{R})$ et $SO_4(\mathbb{R})$ via les quaternions	105
Exercices du chapitre 2	109
Solutions des tests du chapitre 2	113
Solutions des exercices du chapitre 2	115
Chapitre 3. Ensembles	121
1. Rappels et quelques compléments	121
1.1. Parties	121
1.2. Relations binaires	122
1.3. Applications	123
1.4. Familles et produits	124
1.5. Peut-on tout faire avec des ensembles ?	124
2. Ensembles ordonnés	125
2.1. Relations d'ordre	125
2.2. Ordre produit, ordre lexicographique	126
2.3. Bornes et éléments extrémaux	128
2.4. Segments initiaux	129
2.5. Homomorphismes d'ensembles ordonnés	130
2.6. Bons ordres	131
2.7. Récurrence transfinie	133
2.8. Définition d'une fonction par récurrence transfinie	133
Exercices du chapitre 3	135
Solutions des tests du chapitre 3	137
Solutions des exercices du chapitre 3	139
Chapitre 4. Théorie axiomatique des ensembles. Cardinaux	143
1. Théorie axiomatique des ensembles	143
1.1. Les axiomes (presque) simples	143
1.2. Les axiomes techniques	144
1.3. Conséquences	145
1.4. Entiers naturels	146
1.5. Classes ou ensembles	147
1.6. Les axiomes facultatifs	148
1.7. Énoncés équivalents à l'axiome du choix	149
1.8. Des controverses aux mathématiques constructives	151
Deux millénaires de paradoxes et de controverses	151

Brouwer et l'intuitionnisme	152
Mathématiques classiques et mathématiques constructives	153
L'attitude des mathématiciens	155
2. Cardinaux	156
2.1. Théorème de comparabilité	156
2.2. Équipotence	158
2.3. Ensembles dénombrables	160
2.4. Ensembles non dénombrables	163
2.5. Arithmétique cardinale	164
Complément du chapitre 4	167
Les ordinaux	167
1. Relations d'ordre strict	167
2. Ensembles transitifs	168
3. Ordinaux	168
4. Définition d'une fonction par récurrence transfinie sur la classe des ordinaux	172
5. Quelques ordinaux dénombrables	172
6. Lemme de Zorn	175
7. Cardinaux et ordinaux	176
8. L'invention des ordinaux	177
Exercices du chapitre 4	179
Solutions des tests du chapitre 4	181
Solutions des exercices du chapitre 4	183
Bibliographie	187
Index des notations	189
Index	191