

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>Chapitre 1. Théorie des groupes</b>	<b>15</b>
1. Généralités sur les groupes . . . . .	19
1.1. Définition d'un groupe . . . . .	19
1.2. Sous-groupes . . . . .	21
1.3. Morphismes de groupes . . . . .	23
1.4. Isomorphismes de groupes, automorphismes . . . . .	25
2. Sous-groupes distingués et groupes quotients . . . . .	27
2.1. Classes à gauche, classes à droite . . . . .	27
2.2. Sous-groupes distingués et groupe quotient . . . . .	28
2.3. Centre et groupe dérivé . . . . .	31
Le centre . . . . .	31
Le groupe dérivé . . . . .	32
2.4. Sous-groupes d'un groupe quotient et théorèmes d'isomorphisme . . . . .	32
3. Groupes définis par générateurs et relations . . . . .	34
3.1. Sous-groupe engendré par une partie . . . . .	34
3.2. Groupes monogènes, groupes cycliques . . . . .	36
3.3. Groupes libres . . . . .	37
3.4. Présentation d'un groupe . . . . .	39
4. Action d'un groupe sur un ensemble . . . . .	40
4.1. Définitions . . . . .	41
4.2. Exemples : groupe symétrique et action d'un groupe sur lui-même . . . . .	42
4.3. Équation aux classes et formule de Burnside . . . . .	43
5. Groupe produit. Produit semi-direct . . . . .	47
5.1. Produits directs . . . . .	47
5.2. Produits semi-directs . . . . .	48
5.3. Critère de dévissage . . . . .	50
6. Groupes abéliens de type fini . . . . .	53
6.1. Structure des groupes abéliens de type fini . . . . .	53
6.2. Automorphismes des groupes cycliques . . . . .	60
6.3. Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	64
7. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ . . . . .	70
7.1. Propriétés élémentaires du groupe symétrique . . . . .	70
7.2. Le groupe alterné . . . . .	73
Morphisme signature . . . . .	73
7.3. Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ . . . . .	79
8. Sous-groupes de Sylow . . . . .	81
8.1. Sous-groupes de Sylow . . . . .	82
8.2. Les théorèmes de Sylow . . . . .	82
8.3. Quelques applications et compléments . . . . .	85

<b>Compléments du chapitre 1</b>	<b>91</b>
1. Algorithme de Todd-Coxeter . . . . .	91
1.1. Un premier exemple . . . . .	92
1.2. Description de l'algorithme . . . . .	94
2. Géométrie diophantienne . . . . .	96
2.1. Approximation diophantienne . . . . .	96
2.2. L'équation de Pell . . . . .	99
<b>Exercices du chapitre 1</b>	<b>105</b>
<b>Solutions des tests du chapitre 1</b>	<b>107</b>
<b>Solutions des exercices du chapitre 1</b>	<b>111</b>
<b>Chapitre 2. Groupes et algèbre linéaire</b>	<b>115</b>
1. Le groupe linéaire . . . . .	117
1.1. Symétries et projections, rappels des définitions classiques . . . . .	117
1.2. Définitions et caractérisation du groupe linéaire . . . . .	120
1.3. Le groupe spécial linéaire . . . . .	121
1.4. Générateurs . . . . .	122
1.5. Centre et commutateurs . . . . .	128
1.6. Propriétés de groupe . . . . .	135
1.7. Topologie du groupe linéaire . . . . .	137
2. Groupe orthogonal . . . . .	140
2.1. Groupe orthogonal général . . . . .	140
Définitions . . . . .	140
Générateurs de $O(q)$ . . . . .	142
Centre et commutateurs . . . . .	147
2.2. L'espace euclidien canonique . . . . .	152
Quelques rappels sur l'orientation . . . . .	152
Généralités . . . . .	153
Description de $SO_2(\mathbb{R})$ et de $O_2(\mathbb{R})$ . . . . .	154
Sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$ . . . . .	156
Sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$ . . . . .	156
Description de $SO_3(\mathbb{R})$ et de $O_3(\mathbb{R})$ . . . . .	157
Décomposition d'une rotation en produit de retournements. . . . .	163
Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$ . . . . .	163
Description de $SO_n(\mathbb{R})$ et de $O_n(\mathbb{R})$ . . . . .	164
Simplicité de $SO_n(\mathbb{R})$ . . . . .	166
Topologie de $O_n(\mathbb{R})$ . . . . .	168
3. Groupe unitaire . . . . .	171
3.1. Définitions . . . . .	171
3.2. Centre et générateurs . . . . .	172
3.3. Le groupe unitaire canonique . . . . .	173
Généralités . . . . .	173
Topologie de $U_n(\mathbb{C})$ . . . . .	175
4. Décompositions du groupe linéaire . . . . .	175
4.1. Décomposition de Dunford . . . . .	175
4.2. Décomposition polaire . . . . .	176

4.3. Décomposition d'Iwasawa . . . . .	181
<b>Compléments du chapitre 2</b>	<b>183</b>
1. À propos de l'exponentielle . . . . .	183
1.1. Exponentielle de matrice : définition et propriétés élémentaires . . . . .	183
1.2. Différentielle de l'exponentielle . . . . .	184
1.3. Non-injectivité globale, injectivité locale et difféomorphie locale au voisinage de $0_n$ de l'exponentielle . . . . .	188
1.4. Exponentielle et sous-groupes arbitrairement petits de $GL_n(\mathbb{R})$ . . . . .	189
1.5. Exponentielle et semi-groupes à un paramètre . . . . .	189
1.6. Logarithme matriciel et applications . . . . .	191
1.7. Image de l'exponentielle . . . . .	193
1.8. Exponentielle et équations différentielles . . . . .	194
2. Question de connexité . . . . .	195
2.1. Groupes topologiques . . . . .	195
2.2. Algèbre de Lie associée à un groupe topologique . . . . .	201
3. Empilement optimal de disques dans le plan . . . . .	203
3.1. Rappels . . . . .	203
3.2. Volume. . . . .	203
3.3. Empilement de sphères. . . . .	204
3.4. Empilements de disques en dimension 2. . . . .	204
3.5. Recherche des réseaux de densité maximale. . . . .	205
4. Action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré . . . . .	207
4.1. Définition de l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$ . . . . .	207
4.2. Toute orbite sous l'action de $\Gamma$ rencontre $\mathcal{D}$ . . . . .	208
4.3. Quand deux points de $\mathcal{D}$ appartiennent-ils à la même orbite? . . . . .	209
4.4. Domaines fondamentaux . . . . .	212
4.5. Générateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	215
4.6. Classification des réseaux de $\mathbb{C}$ . . . . .	216
5. Le groupe symplectique . . . . .	218
5.1. Définitions . . . . .	218
5.2. Centres et générateurs . . . . .	219
5.3. Propriétés de groupes . . . . .	221
<b>Exercices du chapitre 2</b>	<b>223</b>
<b>Solutions des tests du chapitre 2</b>	<b>225</b>
<b>Solutions des exercices du chapitre 2</b>	<b>229</b>
<b>Chapitre 3. Groupes et géométrie</b>	<b>235</b>
1. Le groupe affine . . . . .	235
1.1. Rappels . . . . .	236
Espace affine . . . . .	236
Quelques propriétés . . . . .	236
Sous-espaces affines . . . . .	237
Applications affines . . . . .	237
Quelques propriétés des applications affines . . . . .	238
Symétries et projections affines . . . . .	238
Symétries et projections (affines) orthogonales . . . . .	239

1.2. Le groupe affine . . . . .	241
Morphisme $f \mapsto \vec{f}$ . . . . .	241
1.3. Le groupe des homothéties-translations . . . . .	243
Isomorphismes affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle . . . . .	243
Calculs dans le groupe des homothéties-translations . . . . .	244
2. Le groupe des isométries affines . . . . .	245
2.1. Généralités . . . . .	245
Groupe des déplacements . . . . .	247
Symétries orthogonales et déplacements . . . . .	247
Les similitudes . . . . .	247
Décomposition d'une isométrie en produit de réflexions . . . . .	250
Décomposition canonique d'une isométrie . . . . .	250
2.2. Les isométries planes . . . . .	251
Classification des isométries affines planes . . . . .	252
Application à la détermination de produit d'isométries planes . . . . .	253
Produit de réflexions . . . . .	253
Détermination de produits d'isométries par décomposition en réflexions . . . . .	255
2.3. Les isométries de l'espace . . . . .	255
Déplacements de l'espace . . . . .	255
Rotations affines . . . . .	256
Vissages . . . . .	257
Antidéplacements de l'espace . . . . .	259
Classification des isométries de l'espace . . . . .	260
Composition de réflexions . . . . .	260
Détermination de produits de retournements par décomposition en réflexions . . . . .	262
2.4. Image d'une partie par une isométrie . . . . .	263
Familles de points isométriques . . . . .	263
2.5. Isométries conservant une partie . . . . .	265
Similitudes conservant une partie bornée . . . . .	265
Points fixes des isométries conservant une partie . . . . .	265
Groupes d'isométries conservant des parties semblables . . . . .	266
2.6. Sous-groupes finis de $\text{Is}(E)$ . . . . .	268
Groupes finis d'isométries planes . . . . .	269
Le groupe des trois symétries . . . . .	269
Classification . . . . .	269
Isométries planes conservant un polygone régulier . . . . .	270
Classification des groupes finis d'isométries planes à conju- gaison près . . . . .	272
Exemples simples de groupes finis de rotations de l'espace . . . . .	273
Le groupe des trois retournements . . . . .	273
Groupe des rotations de l'espace conservant un polygone régulier . . . . .	273
3. Les polyèdres réguliers de l'espace et leurs groupes de rotation . . . . .	275
3.1. Généralités sur les polyèdres réguliers . . . . .	275
Isométrie conservant un polyèdre . . . . .	275
Définition des polyèdres réguliers . . . . .	276

Classification à l'aide de la formule d'Euler . . . . .	277
Nombre d'isométries conservant un polyèdre régulier $P$ . . . . .	277
Isométries conservant une arête . . . . .	278
Rotations fixant un sommet . . . . .	279
3.2. Classification des polyèdres réguliers à similitude près . . . . .	280
Angle géométrique entre un bipoint et son image par une rotation . . . . .	281
Valeurs possibles du symbole d'un polyèdre régulier . . . . .	281
3.3. Le tétraèdre régulier et son groupe d'isométries . . . . .	283
Introduction . . . . .	283
Propriétés géométriques du tétraèdre régulier . . . . .	283
3.4. Le cube et son groupe d'isométries . . . . .	285
Définition et propriétés géométriques du cube . . . . .	285
Les rotations du cube . . . . .	286
Description de $Is^+(CU)$ . . . . .	286
Isomorphisme avec le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ . . . . .	287
3.5. L'octaèdre régulier et son groupe de rotations . . . . .	288
Construction de l'octaèdre régulier . . . . .	288
Isométries conservant l'octaèdre régulier . . . . .	288
3.6. L'icosaèdre régulier et son groupe de rotations . . . . .	289
Construction des sommets de l'icosaèdre . . . . .	289
Premières propriétés de l'icosaèdre . . . . .	290
Rotations d'ordre 5 conservant l'icosaèdre $\mathcal{I}$ . . . . .	292
Autres rotations conservant l'icosaèdre régulier . . . . .	295
Isomorphisme du groupe des rotations de $\mathcal{I}$ avec le groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ . . . . .	296
3.7. Le dodécaèdre régulier et son groupe de rotations . . . . .	297
3.8. Les sous-groupes finis de $SO_3$ . . . . .	300
Détermination du cardinal d'un sous-groupe de rotations . . . . .	300
Opération sur l'ensemble des pôles . . . . .	300
Application de la formule de Burnside . . . . .	301
Classification, à isomorphisme près, des groupes finis de rotations de l'espace . . . . .	302
Étude du cas 1 où $k = 2, n_1 = n_2 = 2$ . . . . .	303
Étude du cas 2 où $k = 3, n_1 = 2, n_2 = 2$ ou $n_2 = 3$ et $n_3 \geq n_2$ . . . . .	303
Étude du cas 3 où $k = 3, n_1 = 2, n_2 = 3$ et $n_3 = 3$ . . . . .	303
Étude du cas 5 où $k = 3, n_1 = 2, n_2 = 3$ et $n_3 = 5$ . . . . .	304
Étude du cas 4 . . . . .	304
Classification à conjugaison près dans $Is^+(E)$ des groupes finis de rotations de l'espace . . . . .	305
<b>Compléments du chapitre 3</b> . . . . .	<b>307</b>
1. Dual d'un convexe, d'un polyèdre . . . . .	307
1.1. Ensemble polaire . . . . .	307
Généralités . . . . .	307
Polarité et opérations sur les ensembles . . . . .	308
Partie polaire d'un convexe compact ayant $\bar{0}$ dans son intérieur . . . . .	309
1.2. Dual d'un polyèdre . . . . .	310
Généralités . . . . .	310
Dualité des faces . . . . .	311

Hyperplans d'appui et $k$ -faces . . . . .	311
Représentation des hyperplans d'appui contenant une $k$ -face. . . . .	312
1.3. Dual d'un polyèdre régulier de l'espace . . . . .	313
Régularité du dual . . . . .	313
Caractérisation géométrique du dual d'un polyèdre régulier. . . . .	314
2. Groupes de frises . . . . .	315
2.1. Généralités . . . . .	315
Groupe de frises de vecteur $\vec{u}$ . . . . .	315
Motif d'une frise . . . . .	316
Condition nécessaire d'appartenance à un groupe de frise. . . . .	316
Calculs dans $Is(E)$ . . . . .	317
Trois groupes de frises . . . . .	317
2.2. Groupes de frises formés uniquement de déplacements . . . . .	319
2.3. Groupes de frises contenant un antidéplacement . . . . .	319
Groupes de frises contenant un antidéplacement et ne contenant pas de symétrie centrale . . . . .	319
Groupes de frises contenant un antidéplacement et contenant une symétrie centrale. . . . .	321
2.4. Classification des groupes de frises . . . . .	323
Classification à conjugaison près. . . . .	323
Classification à isomorphisme près. . . . .	323
<b>Exercices du chapitre 3</b>	<b>325</b>
<b>Solutions des tests du chapitre 3</b>	<b>327</b>
<b>Solutions des exercices du chapitre 3</b>	<b>331</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>335</b>
<b>Index des notations</b>	<b>337</b>
<b>Index</b>	<b>339</b>