

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>Chapitre 1. Anneaux</b>	<b>15</b>
1. Rappels	16
1.1. Notations, exemples fondamentaux	16
1.2. Idéaux	19
1.3. Morphismes d'anneaux	19
1.4. Anneaux quotients	20
1.5. Arithmétique	21
Divisibilité	22
Nombres premiers	22
Lemme d'Euclide	22
Nombres premiers entre eux	22
Lemme de Gauss	22
Théorème de Bézout	22
pgcd	22
Existence et unicité du pgcd.	23
ppcm	23
Existence et unicité du ppcm	23
Nombres premiers entre eux, pgcd et ppcm	23
Démonstrations	23
2. Ces êtres étranges qui vivent dans les anneaux	25
2.1. Éléments centraux	25
2.2. Diviseurs de zéro	26
2.3. Éléments réguliers	28
2.4. Éléments nilpotents	29
2.5. Caractéristique d'un anneau	30
2.6. Éléments irréductibles	31
3. Étude des idéaux	34
3.1. Opérations sur les idéaux	34
3.2. Générateurs d'un idéal	35
3.3. Idéaux des anneaux euclidiens	38
3.4. Arithmétique des idéaux	41
Idéaux comaximaux	41
Théorème des restes chinois	43
Système fondamental d'idempotents	45
Un exemple d'application : le polynôme d'interpolation de Lagrange	48
3.5. Radical d'un idéal	49
3.6. Idéaux maximaux	51
3.7. Idéaux premiers	54
3.8. Idéaux de $A/I$	55
4. Corps des fractions d'un anneau intègre	58

4.1. Construction . . . . .	58
4.2. Propriétés . . . . .	60
5. Localisation . . . . .	61
6. Anneaux noethériens . . . . .	66
6.1. Définitions équivalentes . . . . .	66
6.2. Constructions d'anneaux noethériens . . . . .	67
6.3. Anneaux artiniens . . . . .	69
7. Arithmétique . . . . .	71
7.1. Irréductibles ou premiers ? . . . . .	72
7.2. Pgcd-Ppcm . . . . .	73
7.3. Éléments premiers entre eux . . . . .	75
7.4. Anneaux à pgcd . . . . .	76
7.5. Anneaux de Bézout . . . . .	80
7.6. Anneaux factoriels . . . . .	81
Caractérisation et exemples . . . . .	81
Valuation . . . . .	84
7.7. Les anneaux de Bézout sont-ils factoriels ? . . . . .	86
8. Quelques conséquences amusantes . . . . .	87
8.1. L'équation $x^2 + y^2 = z^2$ . . . . .	87
8.2. L'équation $x^4 + y^4 = z^4$ . . . . .	89
8.3. Les sommes de deux carrés . . . . .	90
8.4. L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ . . . . .	92
<b>Complément du chapitre 1</b>	<b>95</b>
1. Les nombres presque premiers . . . . .	95
1.1. À quoi servent les nombres premiers ? . . . . .	95
1.2. Comment trouver un grand nombre premier ? . . . . .	98
1.3. Test de pseudo-primalité . . . . .	99
1.4. Les nombres de Carmichael . . . . .	101
<b>Exercices du chapitre 1</b>	<b>107</b>
<b>Solutions des tests du chapitre 1</b>	<b>109</b>
<b>Solutions des exercices du chapitre 1</b>	<b>113</b>
<b>Chapitre 2. Polynômes</b>	<b>119</b>
1. Polynômes à une indéterminée . . . . .	120
1.1. Polynômes à coefficients dans un anneau . . . . .	120
1.2. Polynômes à coefficients dans un corps . . . . .	122
Division euclidienne . . . . .	123
Idéaux de $K[X]$ . . . . .	124
Racines d'un polynôme . . . . .	128
Polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ . . . . .	132
Localisation des racines d'un polynôme . . . . .	133
1.3. Polynômes à coefficients dans un anneau factoriel . . . . .	136
1.4. Critères d'irréductibilité des polynômes . . . . .	138
2. Polynômes à plusieurs indéterminées . . . . .	144
2.1. Algèbre $A[X_1, \dots, X_n]$ . . . . .	144
2.2. Formules d'Euler et de Taylor . . . . .	147

3. Polynômes symétriques . . . . .	149
3.1. Relations entre coefficients et racines . . . . .	150
3.2. Théorème de structure . . . . .	150
3.3. Sommes de Newton . . . . .	152
4. Élimination . . . . .	155
4.1. Résultant de deux polynômes . . . . .	156
4.2. Applications algébriques du résultant . . . . .	160
Racines multiples des polynômes . . . . .	160
Nombres algébriques . . . . .	165
Transformation des équations algébriques . . . . .	167
Application arithmétique . . . . .	168
5. Fractions rationnelles . . . . .	171
5.1. Corps $K(X)$ des fractions rationnelles . . . . .	171
5.2. Décomposition en éléments simples . . . . .	173
Cas général . . . . .	173
Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ . . . . .	175
Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ . . . . .	178
5.3. Applications de la décomposition en éléments simples . . . . .	179
Application en algèbre linéaire . . . . .	179
Théorème de Gauss-Lucas . . . . .	180
Application aux dénombrements . . . . .	181
5.4. Déterminants de Hankel . . . . .	182
<b>Compléments du chapitre 2</b>	<b>183</b>
1. Applications géométriques du résultant . . . . .	183
1.1. Cas affine . . . . .	183
1.2. Cas projectif . . . . .	187
2. Sous-variétés algébriques de $\mathbb{C}^n$ et idéaux de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ . . . . .	192
3. Polynômes cyclotomiques . . . . .	196
4. Polynômes invariants sous l'action du groupe alterné . . . . .	199
4.1. Cas où 2 est inversible dans $A$ . . . . .	199
4.2. Cas général . . . . .	202
5. Groupe des $K$ -automorphismes de $K(X)$ . . . . .	205
<b>Exercices du chapitre 2</b>	<b>209</b>
<b>Solutions des tests du chapitre 2</b>	<b>211</b>
<b>Solutions des exercices du chapitre 2</b>	<b>213</b>
<b>Chapitre 3. Modules</b>	<b>217</b>
1. Quelques bases pour fixer les idées . . . . .	218
1.1. Définition . . . . .	218
1.2. Petit tour d'horizon . . . . .	220
Produit cartésien . . . . .	220
Matrices . . . . .	220
Polynômes . . . . .	220
Idéal et quotient . . . . .	220
Algèbre . . . . .	220
Généralisation . . . . .	221

Structure de $K[X]$ -module associé à un endomorphisme d'un $K$ - espace vectoriel . . . . .	221
1.3. Morphismes . . . . .	221
2. Sous-modules . . . . .	223
3. Modules quotients . . . . .	224
4. Modules de type fini . . . . .	226
5. Modules noethériens . . . . .	229
6. Opérations sur les sous-modules . . . . .	231
7. Torsion des modules sur un anneau commutatif intègre . . . . .	234
8. Modules libres . . . . .	236
8.1. Familles libres . . . . .	236
8.2. Bases . . . . .	237
9. Modules libres et de type fini sur un anneau commutatif . . . . .	240
9.1. Déterminant . . . . .	241
9.2. Structure des modules libres de type fini . . . . .	245
9.3. Endomorphismes de $A^n$ . . . . .	248
10. Modules sur un anneau principal . . . . .	251
10.1. Généralités et première décomposition . . . . .	251
10.2. Décomposition des modules de torsion . . . . .	255
Décomposition primaire . . . . .	255
Décomposition en modules cycliques . . . . .	257
Lien entre les deux décompositions . . . . .	261
10.3. Théorème de la base adaptée . . . . .	262
11. Applications . . . . .	269
11.1. Structure des groupes commutatifs de type fini . . . . .	269
11.2. Invariants de similitude d'un endomorphisme . . . . .	270
<b>Compléments du chapitre 3</b> . . . . .	<b>275</b>
1. Idéaux inversibles – Anneaux de Dedekind . . . . .	275
1.1. Introduction . . . . .	275
1.2. Idéaux inversibles . . . . .	277
Définition et premières propriétés . . . . .	277
Opérations arithmétiques . . . . .	279
Généralisation . . . . .	283
Inversibilité et idéaux premiers . . . . .	284
1.3. Factorisation des idéaux . . . . .	286
Unicité d'une factorisation . . . . .	286
Existence d'une factorisation . . . . .	286
Conséquences de la factorisation . . . . .	288
1.4. Anneaux de Dedekind . . . . .	291
1.5. Caractères noethérien et intégralement clos des anneaux de Dedekind . . . . .	293
Caractère noethérien . . . . .	293
Caractère intégralement clos . . . . .	294
1.6. Critères « locaux » en terrain intègre noethérien . . . . .	296
2. Principe local-global . . . . .	299
2.1. Présentation du problème . . . . .	300
Un petit exemple, exemplaire . . . . .	301
2.2. Le principe local-global de base . . . . .	302

Parties multiplicatives comaximales . . . . .	302
Résoudre un système linéaire . . . . .	303
Localisation d'un module . . . . .	305
Principe local-global pour les modules de type fini . . . . .	306
2.3. Précisions sur les quotients et les localisations . . . . .	306
2.4. La localisation en tous les idéaux premiers . . . . .	309
Un contre-exemple et les leçons que l'on peut en tirer . . . . .	310
2.5. Le principe local-global pour les suites exactes de $A$ -modules . . . . .	312
2.6. Exemples de propriétés local-globales . . . . .	313
3. Vision des mathématiques constructives sur les modules . . . . .	317
Introduction – Systèmes linéaires sur un anneau commutatif . . . . .	318
3.1. Quelques jolis théorèmes en relation avec les déterminants . . . . .	319
Le rang d'un module libre . . . . .	319
Idéaux de type fini idempotents . . . . .	321
Idéaux déterminantiels d'une matrice . . . . .	321
3.2. Anneaux et modules cohérents . . . . .	324
Une notion fondamentale . . . . .	324
Propriétés de base . . . . .	325
Caractère local de la cohérence . . . . .	327
3.3. Modules de présentation finie . . . . .	327
Un résultat structurel pour les modules de type fini . . . . .	328
Changement de système générateur . . . . .	329
Applications linéaires entre modules de présentation finie . . . . .	330
Cohérence et présentation finie . . . . .	331
Principe local-global . . . . .	332
<b>Exercices du chapitre 3</b>	<b>333</b>
<b>Solutions des tests du chapitre 3</b>	<b>337</b>
<b>Solutions des exercices du chapitre 3</b>	<b>339</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>345</b>
<b>Index des notations</b>	<b>347</b>
<b>Index</b>	<b>349</b>