

Table des matières

[*] : exercice très difficile, ne pas hésiter à consulter le corrigé.

[**] : exercice utilisant des notions hors programme, plutôt destiné aux candidats à l'agrégation.

Introduction	5
---------------------	----------

Plan de la collection	9
------------------------------	----------

1. Intégration	11
-----------------------	-----------

1.1. Un calcul d'intégrale (1)	12
1.2. Un calcul d'intégrale (2)	13
1.3. Irrationalité de e	15
1.4. Irrationalité de $\ln 2$	15
1.5. Changement de variable (1)	17
1.6. Changement de variable (2)	18
1.7. Une inégalité (1)	19
1.8. Une inégalité (2)	19
1.9. Une inégalité (3)	20
1.10. Inégalité de Young	22
* 1.11. Inégalité de Erdős et Gallai	25
1.12. Cas d'égalité dans le théorème de majoration	27
1.13. Graphe de longueur minimale	28
1.14. Inégalité de Van der Corput	29
1.15. Majoration de l'erreur dans la méthode des trapèzes	31
1.16. Méthode des trapèzes pour une fonction convexe	33
1.17. Recherche d'un minimum	35
1.18. Recherche d'une borne inférieure	36
1.19. Inégalité de Hardy	37
1.20. Recherche d'un minimum	38
1.21. Étude d'une suite	39
1.22. Inégalité de Wirtinger	41
1.23. Fonctions dont les deux premiers moments sont nuls	42
1.24. Fonctions dont les n premiers moments sont nuls	44
1.25. Recherche d'orthogonal	45
1.26. Méthode de Gauss	46
1.27. Une somme de Riemann (1)	48
1.28. Une somme de Riemann (2)	48
1.29. Étude asymptotique des sommes de Riemann	50
1.30. Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin	52
1.31. Découpage en morceaux de même aire	57
* 1.32. Estimation d'une suite de coefficients binomiaux	58
1.33. Lemme de Riemann-Lebesgue	61
1.34. Lemme de Riemann-Lebesgue (2)	62

1.35. Généralisation du lemme de Riemann-Lebesgue	63
1.36. Deuxième formule de la moyenne	64
1.37. Calcul d'une intégrale (1)	67
1.38. Calcul d'une intégrale (2)	68
1.39. Opérateur à noyau	69
1.40. Mesure du domaine d'annulation d'une fonction	69
1.41. Nombre de zéros d'une fonction (1)	71
1.42. Nombre de zéros d'une fonction (2)	72
1.43. Limites de normes intégrales	74
1.44. Équivalent d'une primitive	75
1.45. Recherche de limite	76
1.46. Limite d'une suite définie implicitement	77
1.47. Équivalent des intégrales de Wallis	77
1.48. Recherche d'un équivalent (1)	78
1.49. Recherche d'un équivalent (2)	80
1.50. Recherche d'un équivalent (3)	81
1.51. Développement asymptotique (1)	83
1.52. Développement asymptotique (2)	85
1.53. Lemme de Gronwall (1)	87
1.54. Lemme de Gronwall (2)	87
1.55. Moyenne spatiale	88
1.56. Valeur moyenne d'une fonction presque périodique	89
1.57. Une équation intégrale (1)	91
1.58. Une équation intégrale (2)	92
1.59. Une équation intégrale (3)	92
1.60. Une équation intégrale (4)	94
1.61. Indice d'une courbe fermée	96
1.62. Une preuve du théorème de D'Alembert-Gauss	99
* 1.63. Méthode de Laplace (1)	101
* 1.64. Méthode de Laplace (2)	104
2. Espaces vectoriels normés	109
2.1. Calcul d'une borne inférieure	110
2.2. Une inégalité	111
2.3. Normes absolues	112
2.4. Espace normé réel vs espace normé complexe	114
2.5. Une fonction lipschitzienne	115
2.6. Caractérisation des normes euclidiennes	117
2.7. Orthogonalité généralisée	118
* 2.8. Prolongement d'une norme définie sur $\mathbb{Z}^2$	119
2.9. Espace des fonctions lipschitziennes	121
2.10. Comparaison de normes sur $\mathbb{R}[X]$	121
2.11. Normes p	122
2.12. Comparaison de normes sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$	125
2.13. Norme infinie vs norme de la convergence en moyenne quadratique	126
2.14. Équivalence à une norme strictement convexe	127
2.15. Distance à un sous-espace fermé	129

2.16. Recherche d'un minimum	130
2.17. Polynôme de meilleure approximation uniforme	132
2.18. Distance de Hausdorff	133
2.19. Caractérisation des boules ouvertes	135
2.20. Lemme de recouvrement de Vitali	136
2.21. Application fermée	137
2.22. Sous-espaces fermés	138
2.23. Fonctions injectives, surjectives, bijectives	138
2.24. Polynômes simplement scindés de $\mathbb{R}_n[X]$	140
2.25. Théorème de Cantor-Bendixson	142
2.26. Espaces séparables	143
2.27. Fonctions continues et dérivables nulle part	144
2.28. Choix de la limite d'une suite	146
2.29. Quasi-isométrie	147

3. Continuité

151

3.1. Étude de continuité (1)	151
3.2. Étude de continuité (2)	152
3.3. Étude de continuité (3)	152
3.4. Continuité de la composition	154
3.5. Racine maximale d'un polynôme de degré 3	154
3.6. Paramétrage continu des racines d'un polynôme	156
3.7. Fonction discontinue mais continue sur toute droite	158
3.8. Fonctions semi-continues inférieurement	159
3.9. Applications continues ouvertes de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$	160
* 3.10. Fonction continue ouverte	162
3.11. Prolongement par continuité	164
3.12. Théorème de prolongement de Tietze	165
* 3.13. Réciproque du théorème de Heine	167
3.14. Fonctions convexes	168
3.15. Relèvement d'une fonction définie sur le disque unité	170
* 3.16. Intersection de deux courbes reliant les sommets opposés d'un carré	171
3.17. Famille de disques fermés	173
3.18. Application continue définie sur $C([0, 1], \mathbb{R})$	174
3.19. Opérateurs sur $\mathbb{R}[X]$	175
3.20. Crochet de Lie (1)	176
3.21. Crochet de Lie (2)	177
3.22. Théorème de l'application ouverte en dimension finie	179
3.23. Caractérisation des formes linéaires continues	180
3.24. Norme d'une forme linéaire continue	180
3.25. Calcul d'une norme subordonnée (1)	182
3.26. Calcul d'une norme subordonnée (2)	183
3.27. Calcul d'une norme subordonnée (3)	184
* 3.28. Théorème d'Auerbach	187
3.29. Duals topologiques de ℓ^1 et c_0	188
* 3.30. Dual topologique de ℓ^∞	191
* 3.31. Théorème de Hahn-Banach en dimension finie	194

3.32. Automorphismes unitaires de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$	196
* 3.33. Non existence d'une projection continue de $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ sur $C([0, 1], \mathbb{R})$	196
3.34. Distributions	198

4. Compacité 205

4.1. Boule de rayon minimal contenant un compact	205
4.2. Théorème de Riesz	207
4.3. Applications propres, applications fermées	208
4.4. Dilatations d'un compact	210
4.5. Théorème du point fixe	212
4.6. Suite ayant deux valeurs d'adhérence	213
4.7. Exemple de partie compacte de $\mathbb{R}$ (1)	214
4.8. Exemple de partie compacte de $\mathbb{R}$ (2)	216
4.9. Somme de deux compacts	218
* 4.10. Attracteur d'une famille de contractions	221
4.11. Endomorphismes stabilisant un compact	223
4.12. Hypercube de Hilbert	224
4.13. Compacité d'une boule en dimension infinie	225
4.14. Compacité faible de la boule unité de $\ell^2(\mathbb{N})$	227
4.15. Application linéaire compacte	228
4.16. Opérateur d'Hilbert-Schmidt	229
4.17. Fonctions minimales (1)	232
* 4.18. Fonctions minimales (2)	234
* 4.19. Théorème de Gottschalk et Hedlung (1955)	236
4.20. Précompacité (1)	239
* 4.21. Précompacité (2)	242
4.22. Isométries d'un compact	244
4.23. Recouvrement minimal	245
4.24. Enveloppe convexe fermée et précompacité	246
4.25. Graphe d'une fonction höldérienne	248
4.26. Courbe de Peano-Hilbert	249
* 4.27. Applications expansives	253
* 4.28. Espace de fonctions C^1 sur lequel la dérivation est continue	254
4.29. Propriété de Borel-Lebesgue	256
4.30. Morphismes d'algèbres de $C^0(K, \mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$	257

5. Convexité 259

5.1. Un convexe fermé non borné contient une demi-droite	259
5.2. Semi-métrique associée à un cône convexe	260
5.3. Séparation d'un point et d'un convexe ouvert	262
5.4. Adhérence et intérieur d'un convexe	263
5.5. Partie convexe dense	265
5.6. Sur l'inégalité triangulaire	266
5.7. Jauge d'un convexe compact	268
5.8. Points extrémaux d'un convexe (1)	270
5.9. Points extrémaux d'un convexe (2)	271

5.10. Points extrémaux de la boule unité de $C([0, 1], \mathbb{R})$	273
5.11. Existence d'un point extrémal	275
5.12. Sommets d'un polyèdre	277
5.13. Projection sur un convexe compact	278
5.14. Dual d'un cône convexe	279
5.15. Intersection de carrés ou de disques	281
5.16. Hyperplan d'appui	282
5.17. Séparation de deux convexes	284
5.18. Théorème de Krein-Milman	286
5.19. Théorème de Carathéodory (1907)	288
5.20. Théorème de Jung (1901)	289
5.21. Théorèmes de Radon (1921) et de Helly (1913)	291
5.22. Théorème de Kakutani (1941)	293
5.23. Théorème de Kakutani commutatif	294
5.24. Application 1-lipschitzienne dans un compact convexe	295
5.25. Théorème de Brouwer (1912)	297
5.26. Lemme de non-rétraction	301
* 5.27. Théorème de Motzkin	305
** 5.28. Diamètres d'un convexe compact plan	308
** 5.29. Formule de Steiner-Minkowski en dimension 2	311

6. Connexité par arcs 315

6.1. Connexité de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$	315
6.2. Connexité d'un cône	316
6.3. Partie de $\mathbb{C}^n$ connexe par arcs	317
6.4. Dénombrément de composantes connexes	318
6.5. Composantes connexes d'ensembles de polynômes	320
6.6. Complémentaire d'un hyperplan	322
6.7. Complémentaire d'un compact	323
6.8. Ensembles de Julia	324
6.9. Suite décroissante de compacts connexes par arcs	326
6.10. Injection continue	327
6.11. Fonction à fibres compactes	328
6.12. Ensemble des zéros compact	328
6.13. Une caractérisation des fonctions continues	329
6.14. Distance à la frontière	330

7. Topologie et matrices 333

7.1. Matrices de rang r	333
7.2. Matrices diagonalisables complexes	334
7.3. Matrices diagonalisables réelles	335
7.4. Matrices cycliques	336
7.5. Racines de l'identité	337
7.6. Point isolé dans l'ensemble des racines q -ièmes de l'identité	339
7.7. Ensemble des symétries	340
7.8. Partie compacte stable par produit	342

7.9. Conditionnement d'un système linéaire	342
7.10. Rayon spectral (1)	343
7.11. Rayon spectral (2)	345
7.12. Suite des puissances bornée	347
7.13. Suite des traces des puissances itérées	348
7.14. Une preuve du théorème de Cayley-Hamilton	349
7.15. Semi-normes invariantes par similitude	350
7.16. Classes de similitude bornées	352
7.17. Classe de similitude d'une matrice diagonalisable	352
7.18. Classe de similitude d'une matrice nilpotente	354
7.19. Classe de similitude non bornée	354
7.20. Condition pour que $\text{rg } A = \text{rg } A^2$	355
7.21. Expression de u^{-1} comme polynôme de u	356
7.22. Chemin continu de projecteurs	357
*7.23. Homéomorphisme local	359
7.24. Ellipsoïde de John-Loewner	361
7.25. Sous-groupes compacts de $\text{GL}_d(\mathbb{R})$	363
7.26. Groupe linéaire	365
7.27. Connexité des classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	367
7.28. Connexité d'un ensemble de matrices	368