

Table des matières

Introduction	1
1. Le monde familier	2
2. Les mondes inconnus	3
Chapitre 1. Méthodes qualitatives	9
1.1. Champ de directions et esquisse des solutions	9
Méthode de la grille	10
Méthode des isoclines	11
Calcul par ordinateur	15
1.2. Description qualitative des solutions	17
Entonnoirs et anti-entonnoirs	17
Asymptotes verticales	19
Équation différentielle non définie	19
1.3. Barrières	20
1.4. Entonnoirs et anti-entonnoirs	26
1.5. Trouver et utiliser barrières, entonnoirs et anti-entonnoirs	30
Barrières formées d’isoclines	30
Barrières formées par les solutions d’équations voisines	34
1.6. Asymptotes verticales	35
Exercices	40
Chapitre 2. Solutions explicites	53
2.1. Équations à variables séparables	53
2.2. Équations différentielles linéaires du premier ordre	57
Méthode des coefficients indéterminés	58
Variation des constantes	61
2.3. Équations différentielles linéaires et comptes bancaires	63
2.4. Modèles d’évolution de populations	65
2.5. Équations différentielles exactes	68
2.6. Séries solutions d’équations différentielles	73
Exercices	80
Chapitre 3. Méthodes numériques	89
3.1. Méthode d’Euler	89
Méthodes numériques d’approximation d’une intégrale.	93
3.2. Méthodes numériques plus précises	95

Méthode du point milieu	95
Méthode de Runge-Kutta	95
Méthode naïve de Taylor	99
Méthodes implicites	100
Méthodes à pas variable	100
3.3. Analyse de l'erreur selon la méthode utilisée	101
3.4. Erreurs d'arrondi	107
Arrondi par défaut (ou par excès)	107
Arrondi au plus près	110
3.5. Que faire en pratique ?	114
Exercices	119
Chapitre 4. Inégalité fondamentale, existence, unicité	125
4.1. Évaluation de l'erreur et théorèmes d'existence	125
4.2. Unicité : seuil percé contre désintégration radio-active	126
4.3. Conditions de Lipschitz	131
4.4. L'inégalité fondamentale	135
4.5. Existence et unicité	139
4.6. Erreur sur la pente des autres méthodes numériques	145
4.7. Théorèmes des barrières, entonnoirs et anti-entonnoirs	148
Exercices	153
Chapitre 5. Itération	159
5.1. Itération : modes de représentation et expérimentation	160
Les itérées d'une fonction	160
Histoires	162
Itération graphique	163
Points fixes	165
Points périodiques	168
Comparaison des différents modes de représentation	172
Changement de variables dans un système itératif	173
5.2. Le modèle logistique et les polynômes du second degré	175
Croissance des populations : le modèle logistique	175
Un changement de variable	178
La cascade	178
5.3. Méthode de Newton	182
Interprétation géométrique de la méthode de Newton	183
Comportement local de la méthode de Newton	183
Comportement global de la méthode de Newton	186
Les ennuis qui peuvent se produire	187
Méthode de Newton appliquée aux fonctions de plusieurs variables	192
5.4. Les méthodes numériques vues comme des systèmes itératifs	193

5.5. Équations différentielles périodiques	202
Propriétés de la fonction P_{t_0}	208
5.6. Itération complexe	210
Orbites bornées et orbites non bornées	211
Images dans le plan complexe	212
Ensembles de Cantor	215
La figure dans le plan des c	218
Auto-similitude dans le plan des z et dans le plan des c	221
Universalité de l'ensemble de Mandelbrot	223
Exercices	225

Chapitre 6. Systèmes d'équations différentielles **239**

6.1. Représentation graphique des systèmes	240
Systèmes différentiels de \mathbb{R}^2 , représentations des solutions dans \mathbb{R}^3	241
Portrait de phase dans \mathbb{R}^2	243
Dessiner le portrait de phase d'un système autonome dans \mathbb{R}^2	246
Un système dans \mathbb{R}^3	248
6.2. Théorèmes pour les systèmes d'équations différentielles	248
Approximations numériques	249
Quelques résultats théoriques de base	251
6.3. Un modèle de dynamique des populations : requins et sardines	254
Et la pêche, dans tout ça ?	257
Critique du modèle de Volterra	259
6.4. Équations d'ordre > 1	259
6.5. Systèmes mécaniques à un degré de liberté	262
Potentiel et énergie	263
Et s'il y a du frottement ?	267
Une bille qui roule sur un rail : étude précise	268
6.6. Le problème des deux corps	270
Mouvement sous l'action d'une force centrale	271
Retour aux lois de Kepler	274
6.7. Flots	278
Exercices	282

Annexe A. Développements asymptotiques **293**

A.1. Équivalence et ordre	293
A.2. La notion de développement asymptotique	294
Le choix d'une échelle	294
Partie principale	295
Développements asymptotiques	296
A.3. Premiers exemples. Formule de Taylor	297
A.4. Exemples de calculs de développements asymptotiques	301

A.5. Règles de calcul sur les développements asymptotiques	303
Annexe B. Correction de quelques exercices	305
B.1. Exercices du chapitre 1	305
B.2. Exercices du chapitre 2	312
B.3. Exercices du chapitre 3	316
B.4. Exercices du chapitre 4	321
B.5. Exercices du chapitre 5	325
B.6. Exercices du chapitre 6	334
Logiciels	349
Bibliographie	351
Index	353